الموضوع: مقدمة في تكامل استيلجس

تعريف: إذا كانت f دالة حقيقية ومحدودة على المجال $[a,b]$ فإننا نقول أن f كاملة حسب ريمان/ على $[a,b]$ إذا وجد $A\in\mathbb{R}$ بحيث يحقق:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k = A$$

نرمز لـ A بـ $(R)\int_a^b f\,dx$ حيث:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ ,\ \Delta x=\max \Delta x_k\ ,\ x_{k-1}\le t_k\le x_k$$

نظرية: (من أهم النظريات في تكامل ريمان)

إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فإنها كاملة على $[a,b]$

تعريف استيلجس:

إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين محدودتين على المجال $[a,b]$ عندئذ نقول إن f كاملة بالنسبة لـ g إذا وجد A بحيث يحقق ما يلي:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta g(x_k) = A$$

نرمز لـ A بـ $(S)\int_a^b f\,dg$ حيث:

$$\Delta g(x_k)=g(x_k)-g(x_{k-1})=g_k-g_{k-1}$$

$$x_{k-1}\le t_k\le x_k\ ,\ \Delta x=\max\Delta x_k=\lambda$$

ملاحظة: إذا كان $g(x)=x$ ⟸ فإن تكامل استيلجس يتحول إلى تكامل ريمان.

تعريف تكامل ريمان باستخدام ε:

إذا كانت f دالة حقيقية ومحدودة على المجال $[a,b]$ فإننا نقول أن f كاملة/ حسب ريمان/ على $[a,b]$ إذا وجد $A\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\, \underset{[a,b]}{P_\varepsilon} : \forall\ P\supset P_\varepsilon\ : |S(P,f)-A|<\varepsilon$$

$$\Delta x=\Delta P\le\Delta P_\varepsilon$$

حيث A تمثل $\int_a^b f\,dx$ و

$$S(P,f)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k \quad \text{(مجموع ريمان)}$$

$$=\{a=x_0<\ldots\ldots<x_n=b\}$$

كلما كانت التجزئة أنعم نصل إلى A

تعريف تكامل استيلجس باستخدام ε :

إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين محدودتين على $[a,b]$ عندئذٍ نقول أن f كمولة بالنسبة إلى g إذا وجد A بحيث يحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon>0 ,\ \exists \underset{[a,b]}{P_\varepsilon} ,\ P \supset P_\varepsilon \rightarrow |S(P,f,g)-A|<\varepsilon$$

$$S(f,g,P)$$

حيث يرمز لـ A بـ $\int_a^b f\,dg$:

$$S(P,f,g)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g(x_k)$$ مجموع استيلجس

$$P=\{a=x_0<x_1<\dots\dots<x_n=b\}$$

ملاحظة: من أجل المقارنة بين (I) و (II) في التكاملات.

$$\{a_n\}_{n\in N}\rightarrow a \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad (I)$$

$$\leftrightarrow \forall \varepsilon>0 ;\ \exists N_\varepsilon : \forall n>N_\varepsilon \rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

- نظرية (1): إذا كانت الدالة $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$ عندئذٍ: الشرط اللازم و الكافي لكون تكامل استيلجس موجوداً $[\int_a^b f\,dg]$ هو أن يكون:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[U(P,f,g)-L(P,f,g)\right]=0$$

طول الفترات المحصورة بين x_{k-1} , x_k

حيث:

$$U(P,f,g)=\sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta g(x_k)$$

حيث: $M_k(f)=\sup f(x) ,\quad x_{k-1}\le x\le x_k$

$$L(P,f,g)=\sum_{k=1}^{n} m_k(f)\cdot\Delta g(x_k)$$

حيث:

$$m_k(f)=\inf f(x)$$
$$x_{k-1}\le x\le x_k$$

- نظرية (2): اذا كانت الدالة $g(x)$ متزايدة على المجال $[a,b]$ وكانت $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ عندئذٍ فإن تكامل استيلجس يكون موجوداً أي $\int_a^b f dg$ موجود
(أقل شروط / أكثر استخداماً)

- نظرية (3): اذا كانت $g(x)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ وكانت $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ فإن تكامل استيلجس يكون موجوداً.

- نظرية (4): اذا كانت f دالة كمولة على $[a,b]$ حسب ريمان وكانت $g(x)$ تحقق شرط ليبشتز على المجال $[a,b]$ فإن تكامل استيلجس يكون موجوداً (f كمولة بالنسبة لـ g)

- نظرية (5): إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ دالة تحقق شرط ليبشتز على المجال $[a,b]$ عندئذٍ تكامل استيلجس يكون موجوداً.

- نظرية (6): اذا كانت الدالة f كمولة حسب ريمان على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ تكتب بالشكل:

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt$$

حيث $\int_a^x |\varphi(t)|\, dt$ موجود ومحدود فإن:
تكامل استيلجس يكون موجوداً ($\int_a^b f dg$ موجود)

- نظرية (7): اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق ومحدودة وكمولة حسب ريمان على $[a,b]$ عندئذٍ تكامل استيلجس يكون موجوداً ومحدداً بالشكل:

$$(S)\int_a^b f dg = (R)\int_a^b f\, g'(x)\, dx$$

أمثلة:

- $(S)\int_0^2 x^2 d(\ln(x+1)) = (R)\int_0^2 x^2 \frac{1}{x+1} dx$
- $(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d(\sin x) = (R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$

انتهت المحاضرة العاشرة