التكامل المعتل

تعريف: نقول عن التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ انه معتل اذا كان أحد حدي التكامل أو كليهما في اللانهاية أو كان التابع المكامل غير مستمر عند نقطة تقع داخل المجال $[a,b]$

- تقارب التكامل المعتل: نقول ان التكامل متقارب اذا كان للتكامل قيمة $A \in \mathbb{R}$

مثال: بين سبب الاعتلال لكل من التكاملات التالية:

$I_1 = \int_{-\infty}^{1} x e^{-x}\,dx$ معتل لوجود ∞ في أحد طرفيه

$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ معتل لوجود $+\infty$ في أحد حديه

$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ معتل لوجود $+\infty$ في أحد حديه

$I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ معتل لأن التابع غير مستمر عند ①

$I_5 = \int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$ معتل لأنه غير مستمر عند ②

$I_6 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha|x|}\,dx,\ \alpha>0$ معتل لوجود $\mp\infty$

$I_7 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ معتل لوجود $+\infty$ في أحد حديه $p \in \mathbb{R}$.

$I_8 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ معتل لوجود $\mp\infty$

$I_9 = \int_1^2 \frac{dx}{x+1}$ غير معتل

$I_{10} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ معتل لأنه غير مستمر عند ①

$I_{11} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

تكاملات خاصة (الهامة):

1: $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\,dx : p>0$ معتل عند ∞ ومعتل اذا كانت $0<p<1$

2: $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx : p>0, q>0.$ معتل عند ① في حالة $0<q<1$
معتل عند ⓪ في حالة $0<p<1$

3: $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$

لابلاس $\mathcal{L}[f(t)]$.

$$I=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_c^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx+\lim_{v\to+\infty}\int_c^v f(x)\,dx.$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\xrightarrow{<}b}\int_a^t f(x)\,dx\ :\ [a,b[$$

$$J=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\xrightarrow{>}a}\int_t^b f(x)\,dx\ :\ ]a,b].$$

أما اذا كان المجال $]a,b[$ فإننا نقسم كالتالي $]a,c]$, $[c,b[$

$$I_1=\int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2}dx=\lim_{t\to-\infty}-\frac{1}{2}\int_t^{-1}-2x e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}\left[e^{-x^2}\right]_t^{-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{e}-e^{-t^2}\right]=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}$$

$$I_2=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{dx}{x}=\lim_{t\to\infty}\left[\ln x\right]_1^t=\lim_{t\to\infty}\left[\ln(t)\right]=+\infty$$

مستمر عند

$$I_5=\int_1^4\frac{dx}{(x-2)^{2/3}}=\underbrace{\int_1^2(x-2)^{-2/3}dx}_{I}+\underbrace{\int_2^4(x-2)^{-2/3}dx}_{J}$$

$$I=\lim_{t\xrightarrow{<}2}\int_1^t(x-2)^{-2/3}dx=\lim_{t\xrightarrow{<}2}3\left[(x-2)^{\frac{1}{3}}\right]_1^t=$$

$$3\lim_{t\xrightarrow{<}2}\left[\sqrt[3]{t-2}-\sqrt[3]{-1}\right]=3.$$

$$J=\lim_{t\to 2^{+}}\int_t^4 (x-2)^{-2/3}\,dx=\lim_{t\to 2^{+}} 3\left[(x-2)^{\frac{1}{3}}\right]_t^4$$

$$=3\lim_{t\to 2^{+}}\left[\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{t-2}\right]=3\sqrt[3]{2}$$

$$I_5=3+3\sqrt[3]{2}$$

وهو متقارب

انتهت المحاضرة.

٢٨/٤/٢٠١٤

المحاضرة الثالثة عشرة.

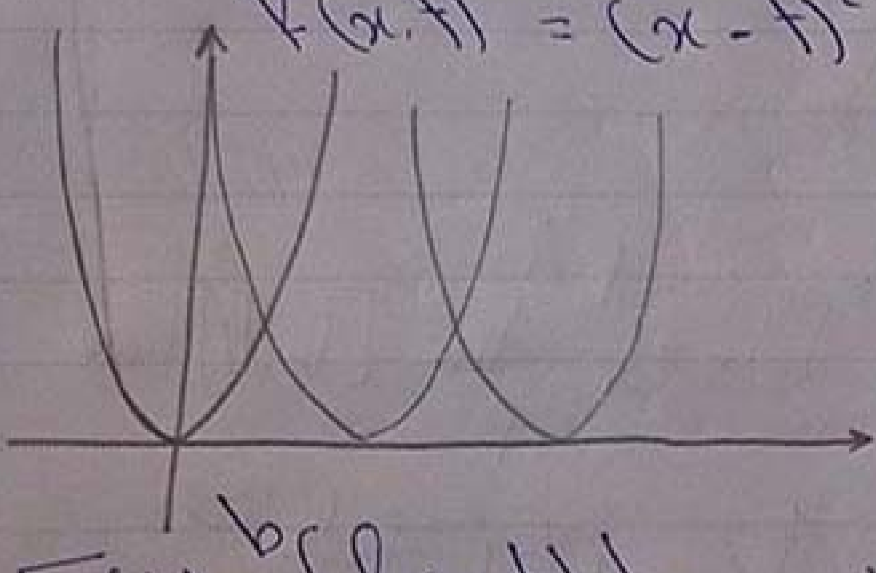
التكامل التابع لوسيط / التكامل العددي:

- تعريف التكامل التابع لوسيط على $[a,b]$
- خواص التكامل التابع لوسيط حيث $a,b\in\mathbb{R}$
- تعريف التكامل العددي.
- طريقة المستطيلات : طريقة أشباه المنحرفات.

تعريف: ان $f(x,t)$: تابع لـ x وفق الوسيط t.

مثال:

$$f(x,t)=(x-t)^2\geq 0$$



$$\left.\begin{array}{l}x\in[a,b]\\ t\in[t_1,t_2]\end{array}\right\}\ [a,b]\times[t_1,t_2]=I\times J$$

$$=\{(x,t): a\leq x\leq b;\ t_1\leq t\leq t_2 : (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$$

هو كل ~~[illegible]~~ تكامل له

الشكل

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx. \quad : a,b\in\mathbb{R} \text{ أو } a(t)\ b(t)$$

مثال: أحسب التكامل التالي:

$$F=\int_a^b (x-t)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_a^b$$

$$F(t)=\frac{1}{3}\left[(b-t)^3-(a-t)^3\right]$$