المحاضرة الرابعة عدد ٤

الاثنين: ٥ / ٥ / ٢٠١٤م

الموضوع: تطبيقات التكامل المحدد.

1- حساب مساحات الأشكال المستوية. "S"

2- حساب حجوم المجسمات الدورانية. "V"

3- مساحات السطوح للمجسمات الدورانية "σ"

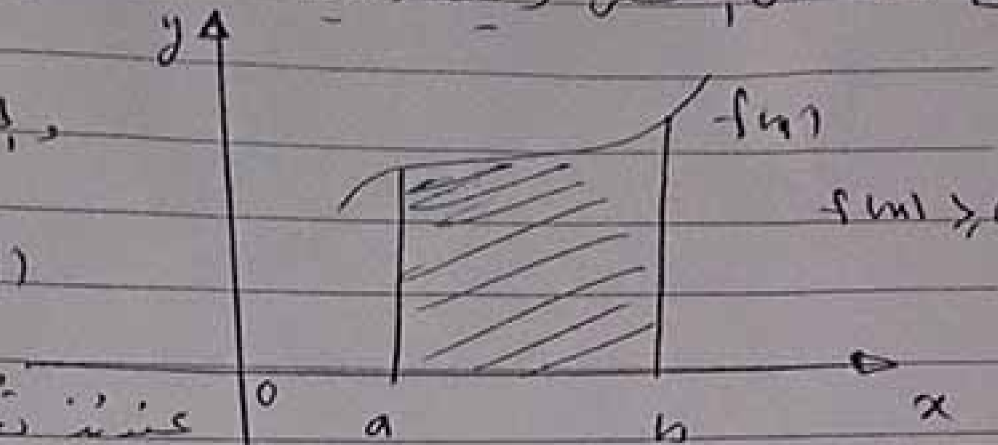
4- أطوال المنحنيات. "l"

المنحني معطى

1) ديكارتياً ، 2) وسيطياً ، 3) قطبياً.

ديكارتياً	وسيطياً	قطبياً
$y = f(x) \quad [a,b]$	$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$	$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$, $r = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$
$S = \int_a^b f(x)\,dx$ المساحة	$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt$	$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$
$V = \pi\int_a^b y^2\,dx$ الحجم	$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi\, y^2(t)\, x'(t)\,dt$	
$\sigma = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ مساحة السطح الدوراني	$\sigma = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$	$\sigma = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_1} r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$
$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ طول المنحني	$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$	$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$

1) الشكل البياني ديكارتياً $y = f(x)$ تابع معرف ومستمر على $[a,b]$



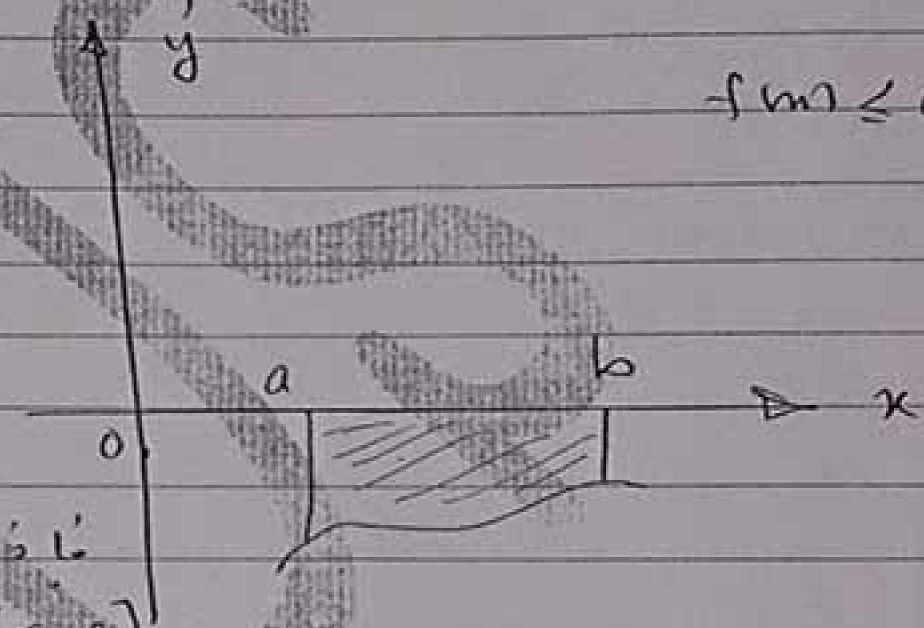
والمطلوب المساحة المحصورة بين

$f(x)$, $x = a$, $x = b$

والمحور ox $(y = 0)$

عندئذ تعطى المساحة

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$

لأن قيمة التكامل سالبة

فإذا كان التابع $f(x)$ معطى بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} f(x) \geq 0 & : [a,c] \\ f(x) \leq 0 & : [c,b] \end{cases}$$

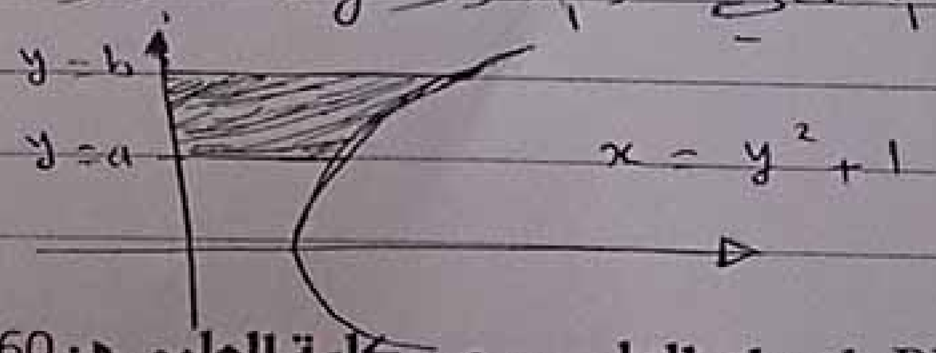
عندئذ المساحة تعطى بالشكل

$$S' = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

لذلك إذا كنا لا نريد الرسم فيجب علينا دراسة إشارة التابع $f(x)$ فإذا كانت موجبة فلا حاجة للضرب بالعدد سالب (-1) وإذا كانت سالبة فنضرب بإشارة سالب

ملاحظة: إذا كانت المساحة المحصورة المطلوبة بين $y = a$, $y = b$ والمنحني والمحور oy بدلاً من x فيمكننا أن نكتب:

$$S = \int_a^b x\,dy$$



ملاحظة (١): إذا كان المطلوب المساحة المحصورة بين تابعين $f(x)$ و $g(x)$ عندئذ ندرس إشارة الفرق

أي لإيجاد $s = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$

ندرس إشارة $\varphi(x) = f(x) - g(x)$

$\varphi(x) = 0$

فإذا كانت $\varphi(x) \geq 0$ حيث

$$s = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

وإذا كانت $\varphi(x) \leq 0$ حيث

$$s = -\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

أسئلة:

١- احسب المساحة المحصورة بين التابع $y = -x^2 + 4x - 3$ والمحور ox (أي $y=0$).

٢- احسب المساحة المحصورة بين التابع $y = x^2 - 4x$ والمحور ox

أو المساحة المحصورة بين التابع والمستقيمات $x = -1, x = 6, y = 0$

٣- " " " " " $y = \sin x$ والمحور ox.

$x \in [0, 2\pi]$ على دور واحد

٤- " " " " " $y = x^3$ والمحور ox

والمستقيمين $x = -2, x = 2$

٥- احسب المساحة المحصورة بين التابع $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ والمحور ox.

٦- احسب المساحة المحصورة بين التابعين $y = x^2 + 1$

$y = -x^2 + 2x + 5$

٧- " " " " " $y = x^2, y = \sqrt{x}$

٨- " " " " " $x = 4 - y^2, x = y^2$

٩ـ احسب المساحة المحصورة بين كل من المنحنيين التاليين: $y=|x-2|$, $y=\sqrt{x}$

" " " $y=x^4$, $y=2x-x^2$

١٠ـ " " " "

المنحنيات الشهيرة :

ديكارتياً وسيطياً

① المستقيم : $y=ax+b \longrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=at+b \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

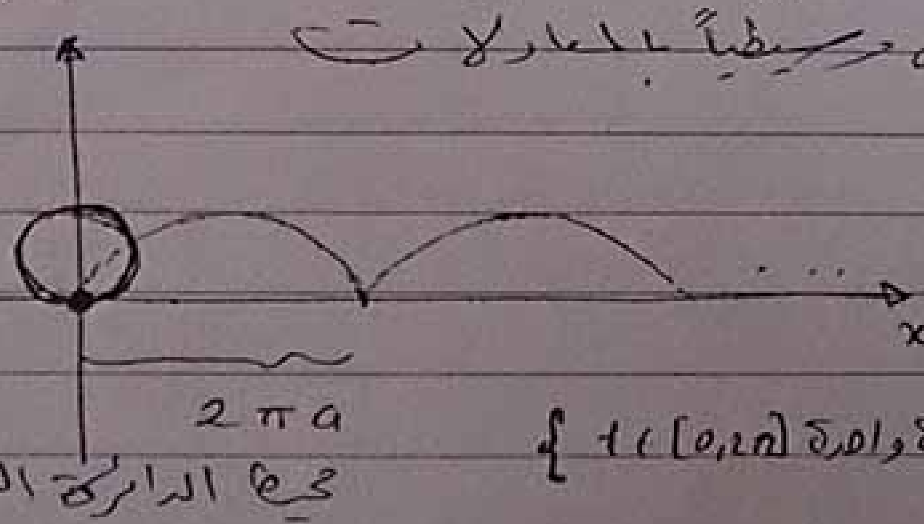
② الدائرة : $x^2+y^2=a^2 \longrightarrow \begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} : t\in[0,2\pi[$

③ القطع المكافئ : $y^2=2px \longrightarrow \begin{cases} y=t \\ x=\frac{1}{2p}t^2 \end{cases}$

④ القطع الناقص : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow \begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} : t\in[0,2\pi[$

⑤ القطع الزائد : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow \begin{cases} x=a\,ch\,t \\ y=b\,sh\,t \end{cases}$ ، $t\in\mathbb{R}$ ، $\begin{cases} x=a\sec t \\ y=b\tan t \end{cases}$ ، $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

⑥ السيكلوئيد : هو منحنٍ ترسمه نقطة $M(x,y)$ من محيط دائرة نصف قطرها a عندما تتدحرج دون انزلاق على مستقيم ثابت بداية من المبدأ O . ويُعطى وسيطياً بالمعادلات



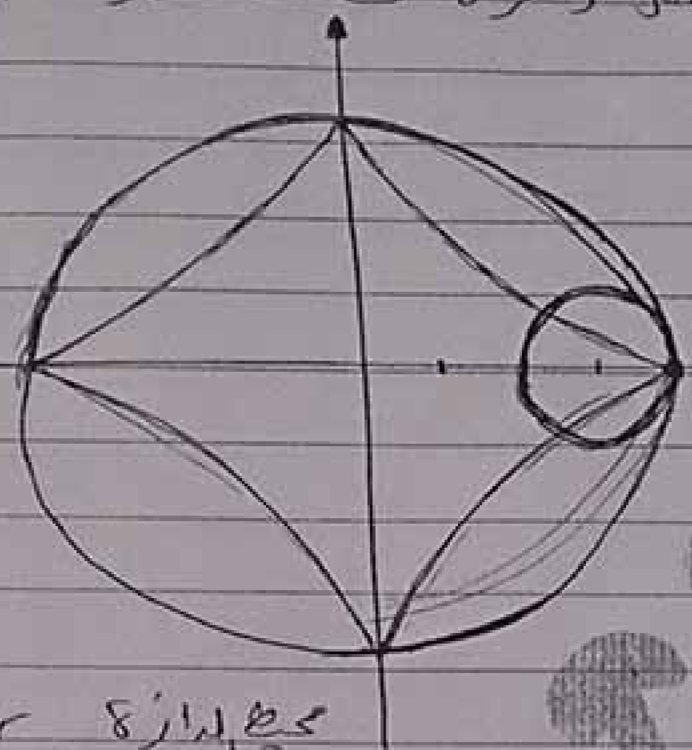
$$x=a(t-\sin t)$$
$$y=a(1-\cos t)$$

حيث $a>0$

$t\in\mathbb{R}$ { خلال دورة واحدة $t\in[0,2\pi]$ }

الاستروئيد: هو منحنى مغلق ترسمه نقطة $M(x,y)$ من محيط دائرة نصف قطرها b عندما تتدحرج دون انزلاق داخل دائرة نصف قطرها $a = 4b$

ويعطى وسيطياً



$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

وديكارتياً $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

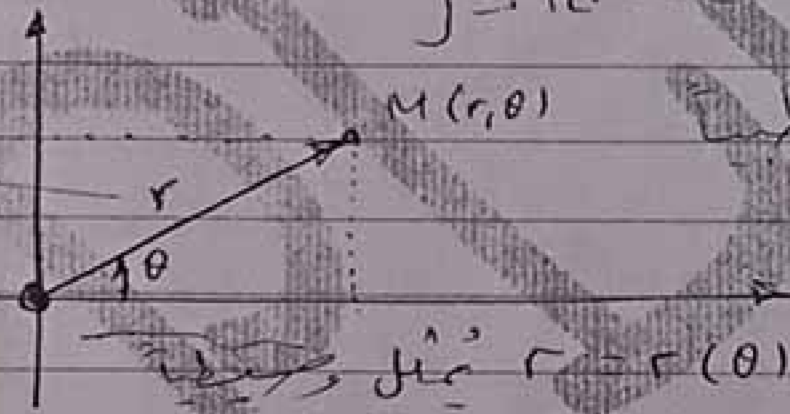
$2\pi r$ محيط الدائرة

$2\pi(4b) = 8\pi b$ محيط الدائرة الكبيرة

$2\pi b, 2\pi b, 2\pi b, 2\pi b$ } الربع الكبير

محيط الدائرة الصغيرة

⑧ الكارديوئيد: معرف قطبياً



نصف القطر الشعاعي

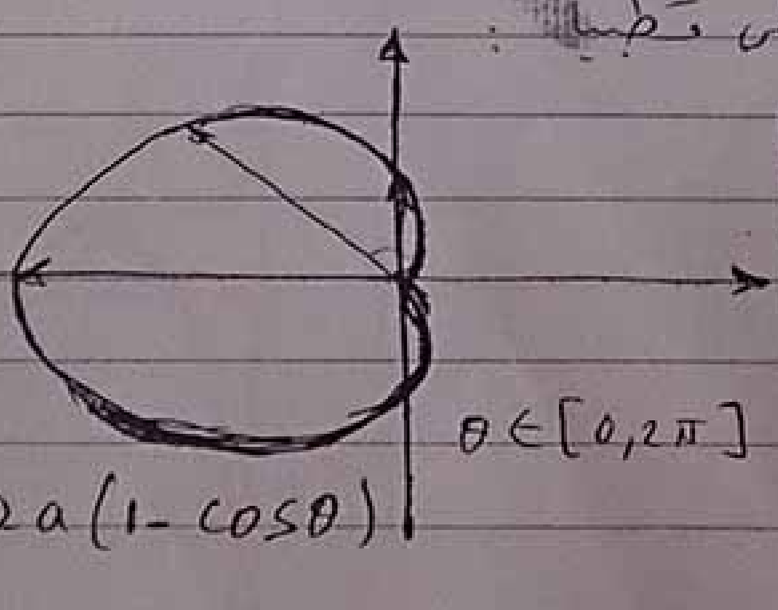
القطب

المحور القطبي

$r = r(\theta)$ تمثل وسيطياً

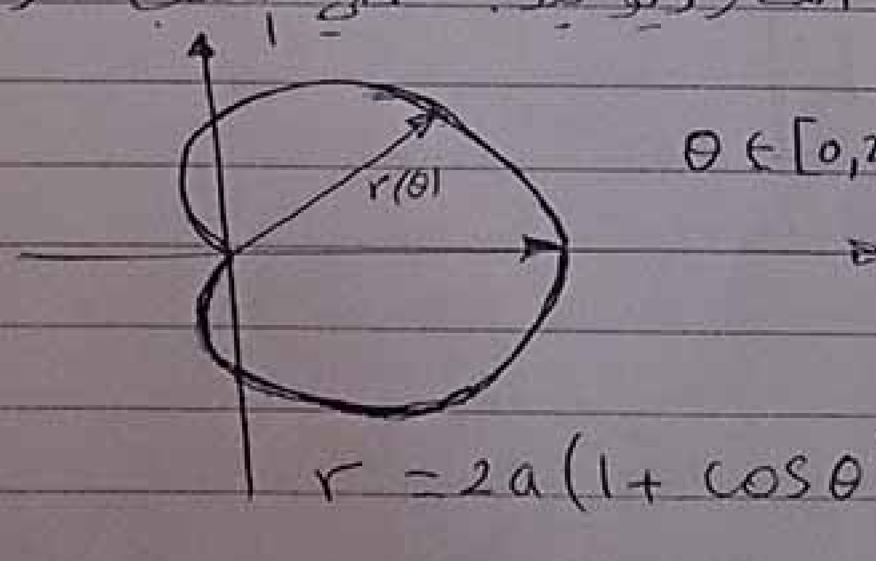
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

الكارديوئيد: منحنى القلب ويعطى قطبياً:



$\theta \in [0, 2\pi]$

$r = 2a(1 - \cos\theta)$



$\theta \in [0, 2\pi]$

$r = 2a(1 + \cos\theta)$

أمثلة:

① احسب المساحة المحصورة بين الخط البياني $y = -x^2+4x-3$ ومحور ox

الحل: ندرس إشارة التابع

$$-x^2+4x-3=0$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-3)(x-1)=0 \Rightarrow x=1 , x=3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
إشارة y		$-$	0	$+$	0	$-$	
		تحت ox		فوق ox		المنحني تحت ox	

ومنه المساحة

$$S = \int_1^3 (-x^3+4x-3)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 3x\right]_1^3$$

$$= \left[-\frac{1}{4}(3)^4 + 2(3)^2 - 3(3)\right] - \left[-\frac{1}{4}+2-3\right]$$

فإذا رسمنا المنحني $y=-x^2+4x-3$

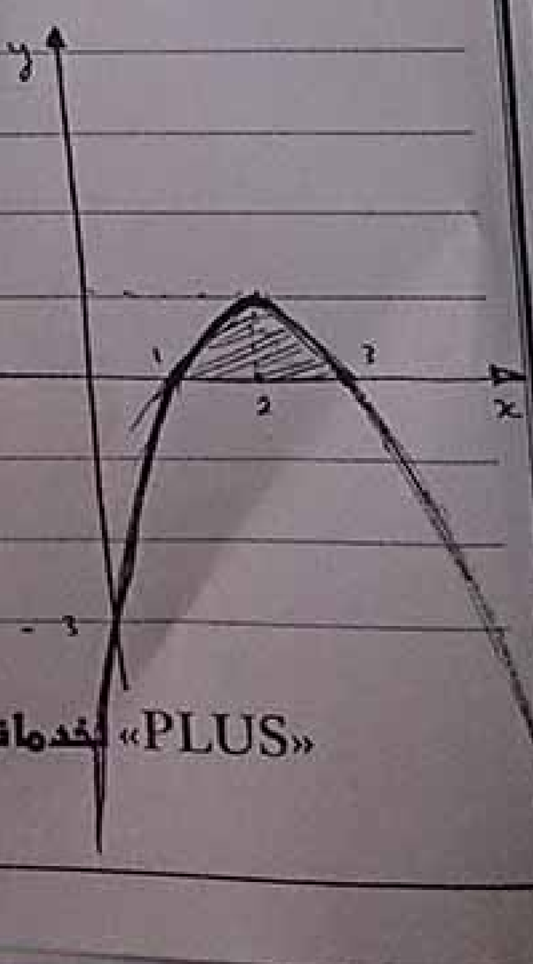
$y=0 \Rightarrow x=1 , x=3$ } أصفاره

$y' = -2x+4 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow -2x+4=0$

$$x=2$$

$$y=-4+8-3=1$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$



$x=0 \Rightarrow y=-3$

نلاحظ أن المساحة المطلوبة فوق محور ox

احسب المساحة المحصورة بين الخط البياني $y = x^2 - 4x$ ومحور ox.

الحل: ندرس إشارة $y = x^2 - 4x$ نفرض أن $y = 0$

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

x	$-\infty$	-1		0		4		6	$+\infty$
إشارة y		$+$		0	$-$	0		$+$	

المساحة: فوق المحور   تحت المحور   فوق المحور

$$S = -\int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_0^4$$

$$= -\left\{\left[\frac{1}{3}(4)^3 - 2(4)^2\right] - 0\right\} = -4^2\left[\frac{4}{3} - 2\frac{(3)}{3}\right]$$

$$= -64\left[\frac{4-6}{3}\right] = +\frac{2(64)}{3} = \frac{128}{3}$$

التطبيق: إيجاد المساحة المحصورة بين الخط البياني والمستقيمات $y=0$, $x=-1$, $x=6$

$$S = \int_{-1}^{0} (x^2 - 4x)\,dx - \int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx + \int_4^6 (x^2 - 4x)\,dx$$

للتأكد نرسم الخط البياني: $y = x^2 - 4x$

$y' = 2x - 4$, $y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y = -4$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

التقاطع مع المحاور

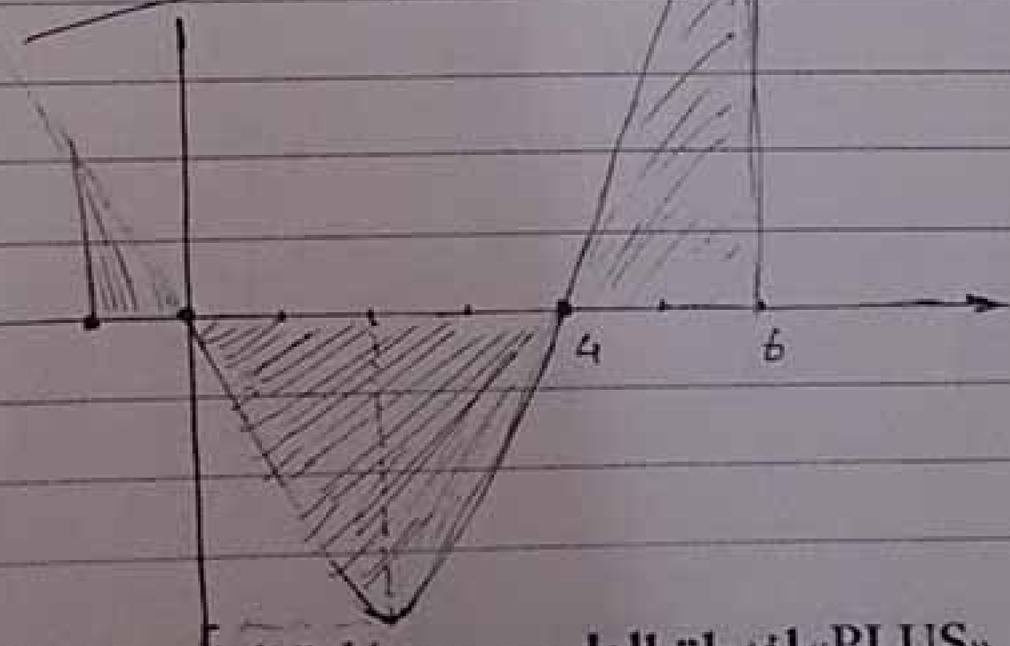
$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

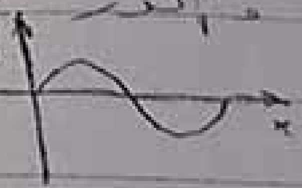
$x = 0$

$x = 4$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$



٣) احسب المساحة المحصورة بين الخطين $y = \sin x$ والمحور ox

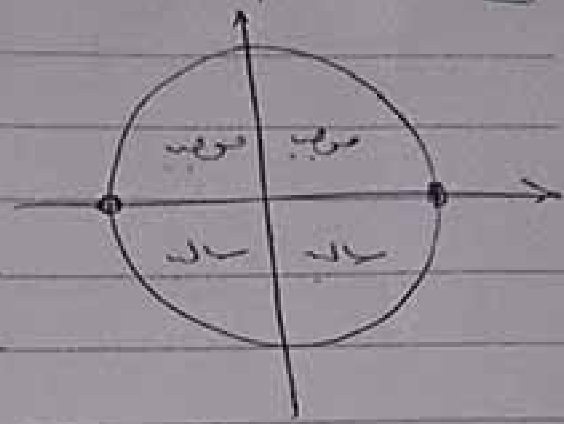


$y = 0$

الحل: ندرس إشارة f .

$\sin x = 0$

$x = \pi k \Rightarrow x = 0 , x = \pi$



x	0		$\pi/2$		π	$3\pi/2$	2π
إشارة y	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$ 0

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$S = -\left[\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = -\left[-1-1\right] + \left[1-(-1)\right]$$

$$S = 2 + 2 = 4$$

---

٢) احسب المساحة المحصورة بين الخط $y = x^3$ والمحور ox بين المستقيمين

$x = -2 , x = 2$

الحل: ندرس إشارة y حيث

$y = 0$

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

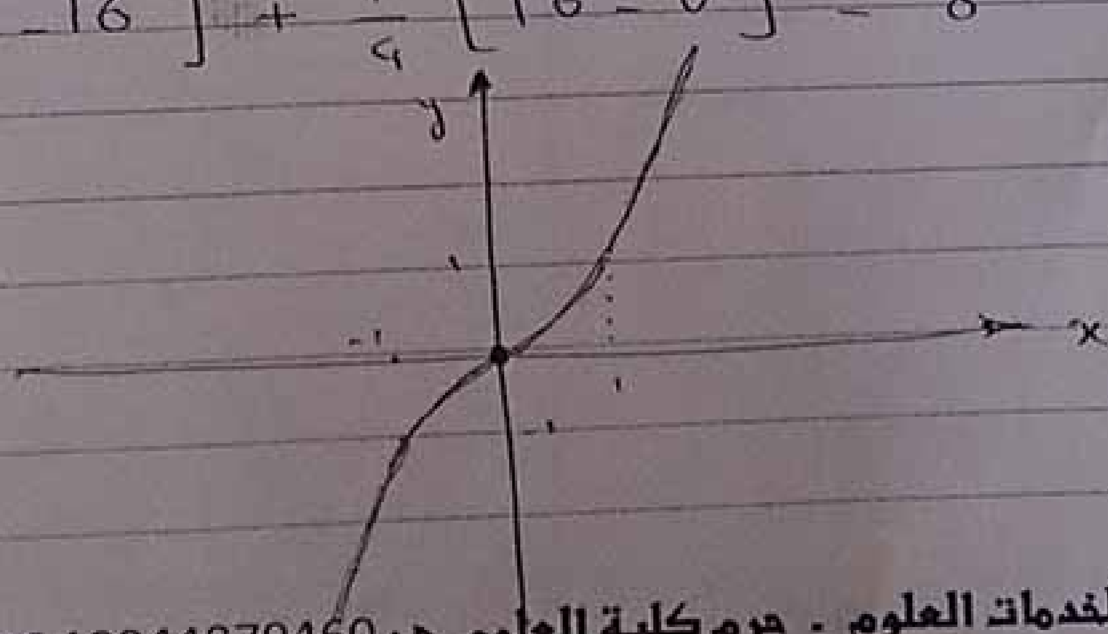
x	$-\infty$	-2	0	$+2$	$+\infty$
إشارة y	$-$	$-$	0	$+$	$+$

المساحة تحت المحور   المساحة فوق المحور

$$S = -\int_{-2}^{0} x^3 \, dx + \int_0^2 x^3 \, dx = -\frac{1}{4}\left[x^4\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left[0 - 16\right] + \frac{1}{4}\left[16 - 0\right] = 8$$

رسم الخط :



المساحة المحصورة بين الخط $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور ox

ح:

نقاط التقاطع مع $y = 0$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 0 \;,\; x = 1 \;,\; x = 2$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y إشارة		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
		المساحة تحت المحور		فوق المحور		تحت المحور		فوق المحور	

$$S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{4} - 1 + 1\right] - \left\{\left[\frac{1}{4}(2)^4 - (2)^3 + (2)^2\right] - \left[\frac{1}{4} - 1 + 1\right]\right\}$$

الرسم: رسم تقريبي

$y = x^3 - 3x^2 + 2x$

$y' = 3x^2 - 6x + 2$

$y' = 0$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$

$\Delta = 36 - 4(2)(3)$

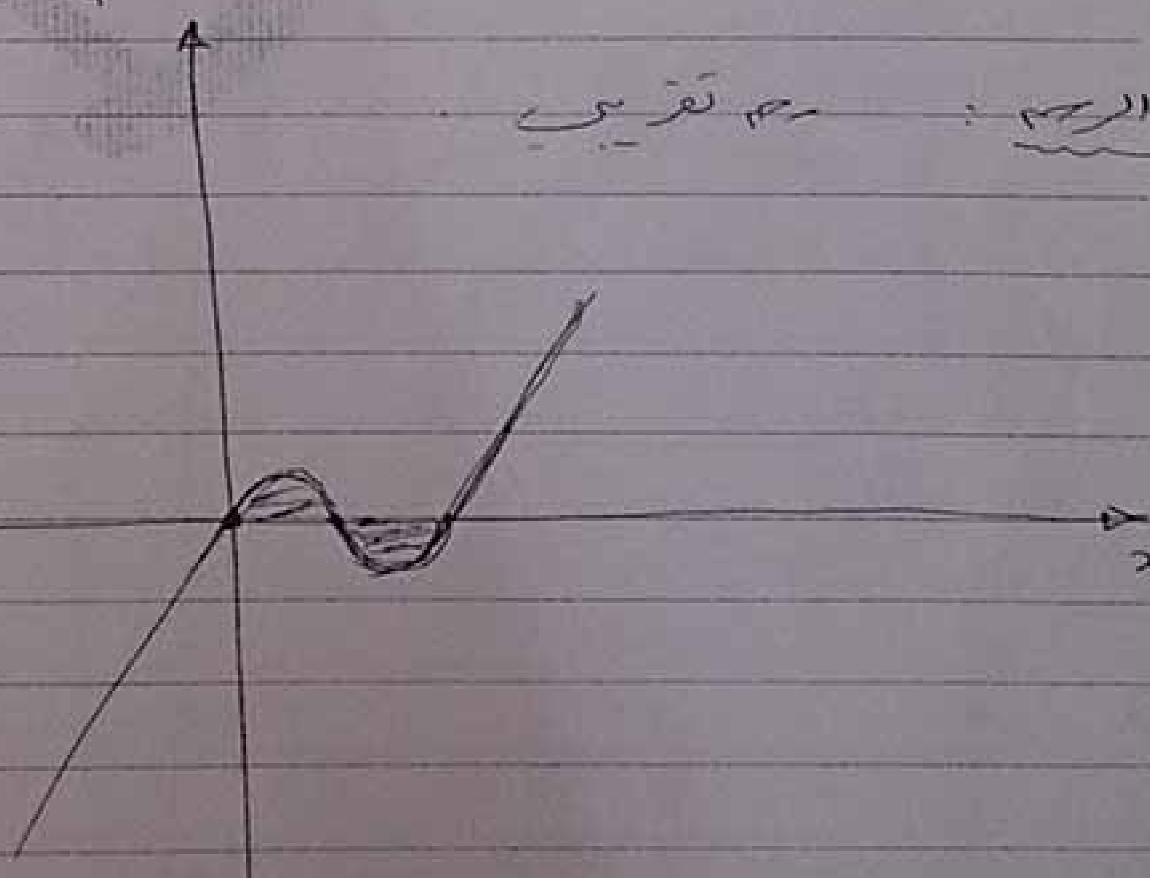
$= 36 - 24$

$= 12 = 4 \times 3$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = 1 + \sqrt{3}/3$

$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$



٦] احسب المساحة المحدودة بين التابعين:

$f(x) = y = x^2 + 1$

$g(x) = y = -x^2 + 2x + 5$

ندرس إشارة $\varphi(x) = f(x) - g(x)$

$\varphi(x) = x^2 + 1 - (-x^2 + 2x + 5)$

$= 2x^2 - 2x - 4$

$\varphi(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
إشارة $\varphi(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

المساحة المطلوبة

$S = -\int_{-1}^{2} (x^2+1) - (-x^2+2x+5)\, dx$

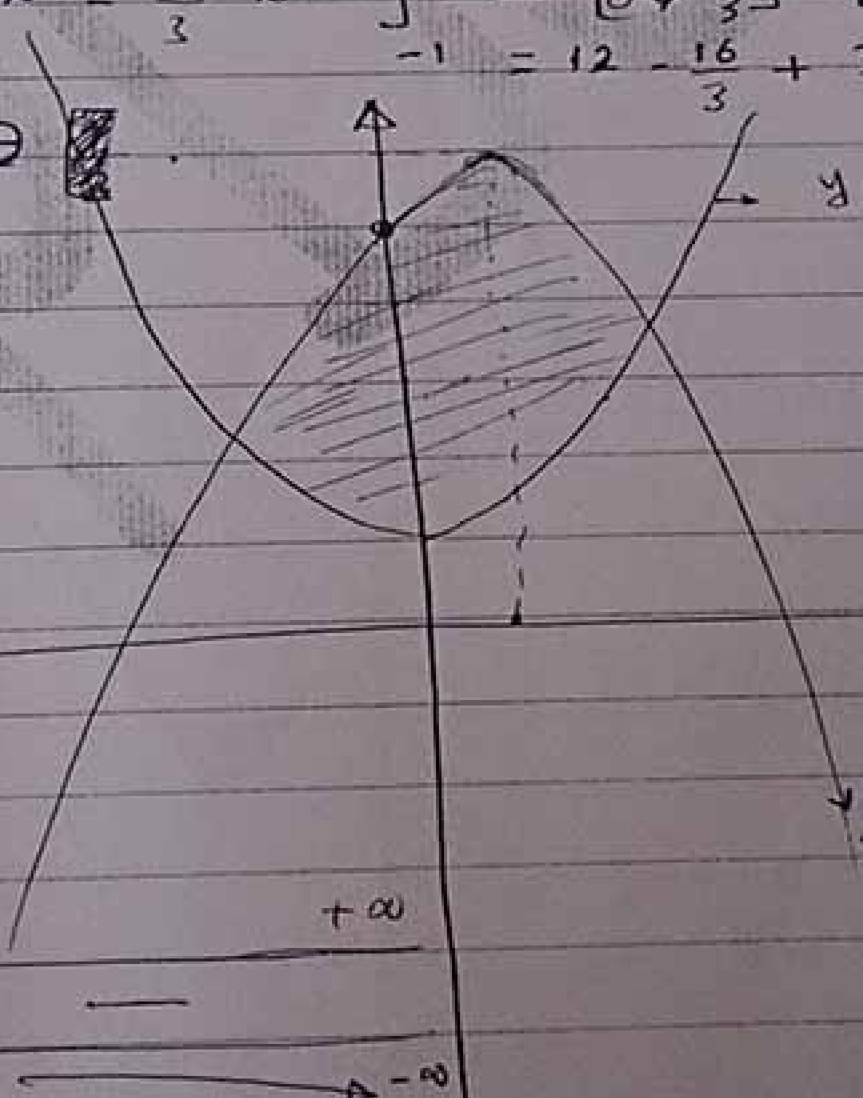
$= -\int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\, dx = \int_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)\, dx$

$= \left[4x + x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \left[8 + 4 - \frac{16}{3}\right] - \left[-4 + 1 + \frac{2}{3}\right]$

$= 12 - \frac{16}{3} + 3 - \frac{2}{3}$

$= 15 - \frac{18}{3} = 9$

الرسم:



$y = x^2 + 1$

$y = -x^2 + 2x + 5$

$x = 0 \Rightarrow y = 5$

$y' = -2x + 2$

$y' = 0$

$-2x + 2 = 0$

$x = 1 \Rightarrow$

$y = -1 + 2 + 5$

$= 6$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

$y = -x^2 + 2x + 5$

احسب المساحة المحصورة بين التابعين

$f(x) = y = x^2$

$g(x) = y = \sqrt{x}$

ندرس إشارة التابع $\varphi(x) = f(x) - g(x)$

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \sqrt{x} = 0$$

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x^1 \Rightarrow x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

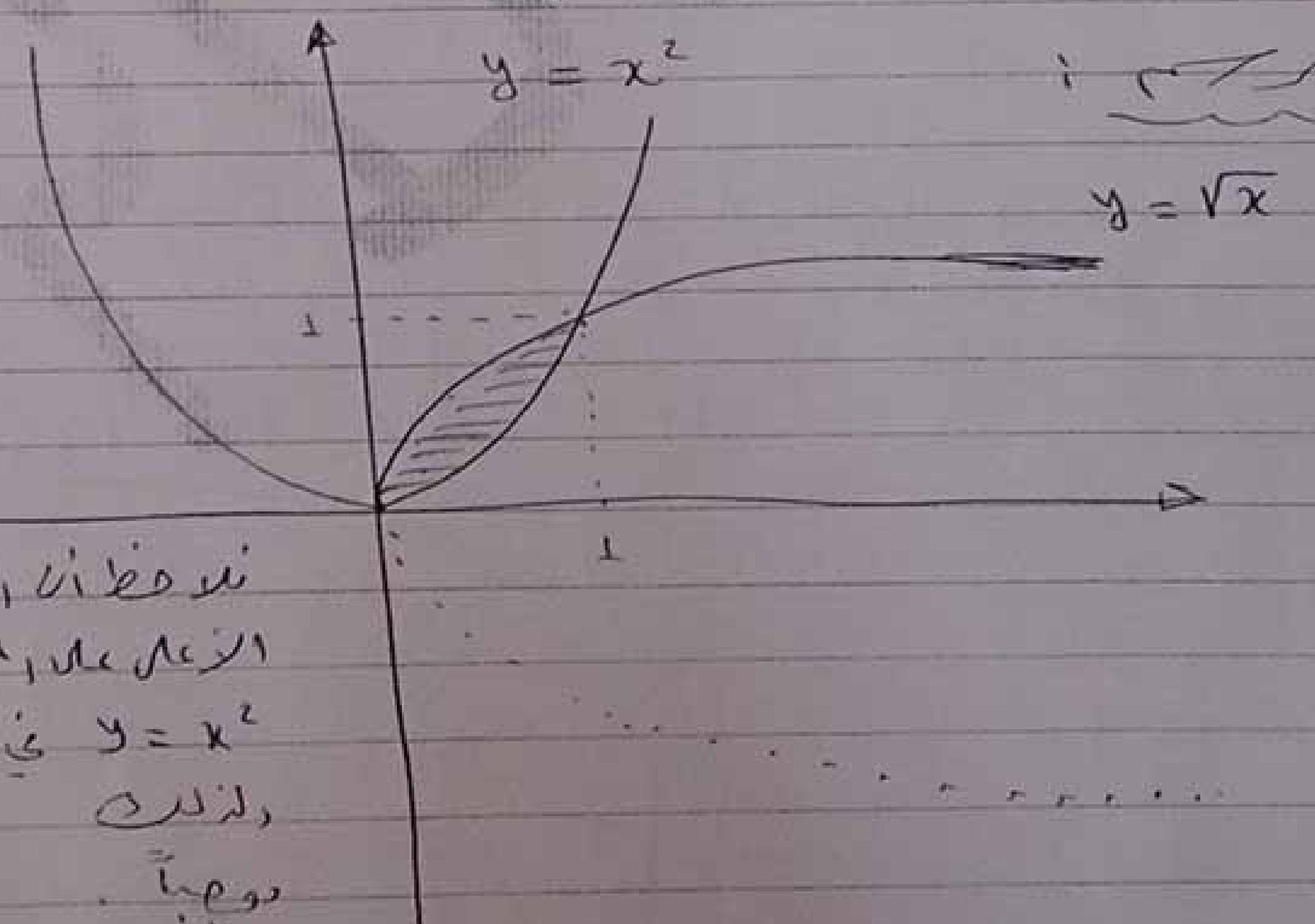
هذا الجزء ليس له جذور، وإشارته موجبة (إشارة x^2) حيث يكون $\Delta < 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$s = -\int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right] - [0] = \frac{1}{3}$$

الرسم :



نلاحظ أن التابع $y = \sqrt{x}$ في الأعلى على المجال $[0,1]$ والتابع $y = x^2$ في الأسفل على $[0,1]$ ولذلك $\sqrt{x} - x^2$ يكون موجباً .

$f(y) = x = 4 - y^2$

$g(y) = x = y^2$

$\boxed{٨}$ احسب المساحة المحصورة بين تابعين

ندرس إشارة φ

$$\varphi(y) = f(y) - g(y)$$
$$\varphi(y) = 4 - y^2 - y^2$$
$$\varphi(y) = 4 - 2y^2$$

$\varphi(y) = 0 \Rightarrow 4 - 2y^2 = 0$

$$2 - y^2 = 0$$
$$(\sqrt2 - y)(\sqrt2 + y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt2 \\ y = +\sqrt2 \end{cases}$$

y	$-\infty$		$-\sqrt2$		$+\sqrt2$		$+\infty$
إشارة φ		$-$	0	$+$	0	$-$	

المساحة موجبة

$$S = \int_{-\sqrt2}^{\sqrt2} (4-y^2) - (y^2)\, dy = \int_{-\sqrt2}^{\sqrt2} (4 - 2y^2)\, dy$$

ت.ز: زوجي

$$= 2\int_0^{\sqrt2} (4 - 2y^2)\, dy$$

$$= 4\int_0^{\sqrt2} (2 - y^2)\, dy = 4\left[2y - \frac13 y^3\right]_0^{\sqrt2} = 4\left[2\sqrt2 - \frac{\sqrt8}{3}\right]$$

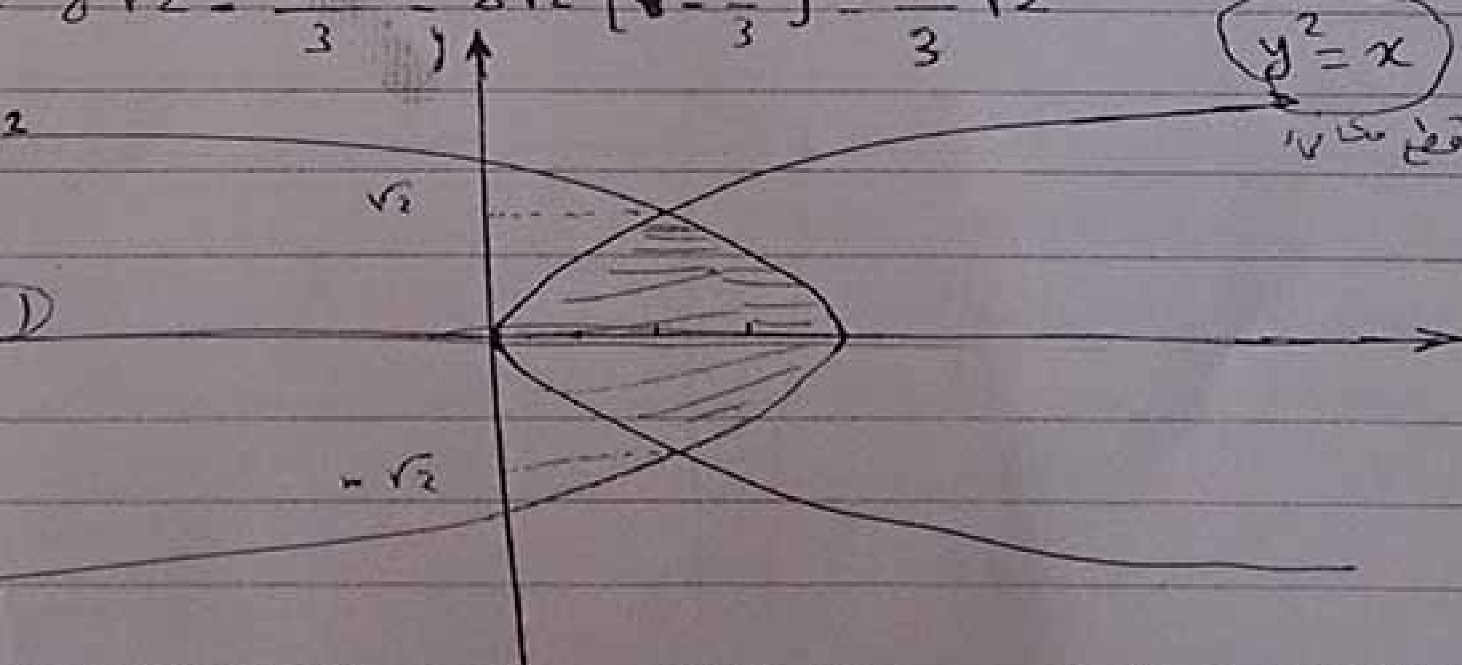
$$= 8\sqrt2 - \frac{8\sqrt2}{3} = 8\sqrt2\left[1 - \frac13\right] = \frac{16}{3}\sqrt2$$

الرسم:

$x = 4 - y^2$

$y^2 = 4 - x$

$y^2 = -1(x-4)$

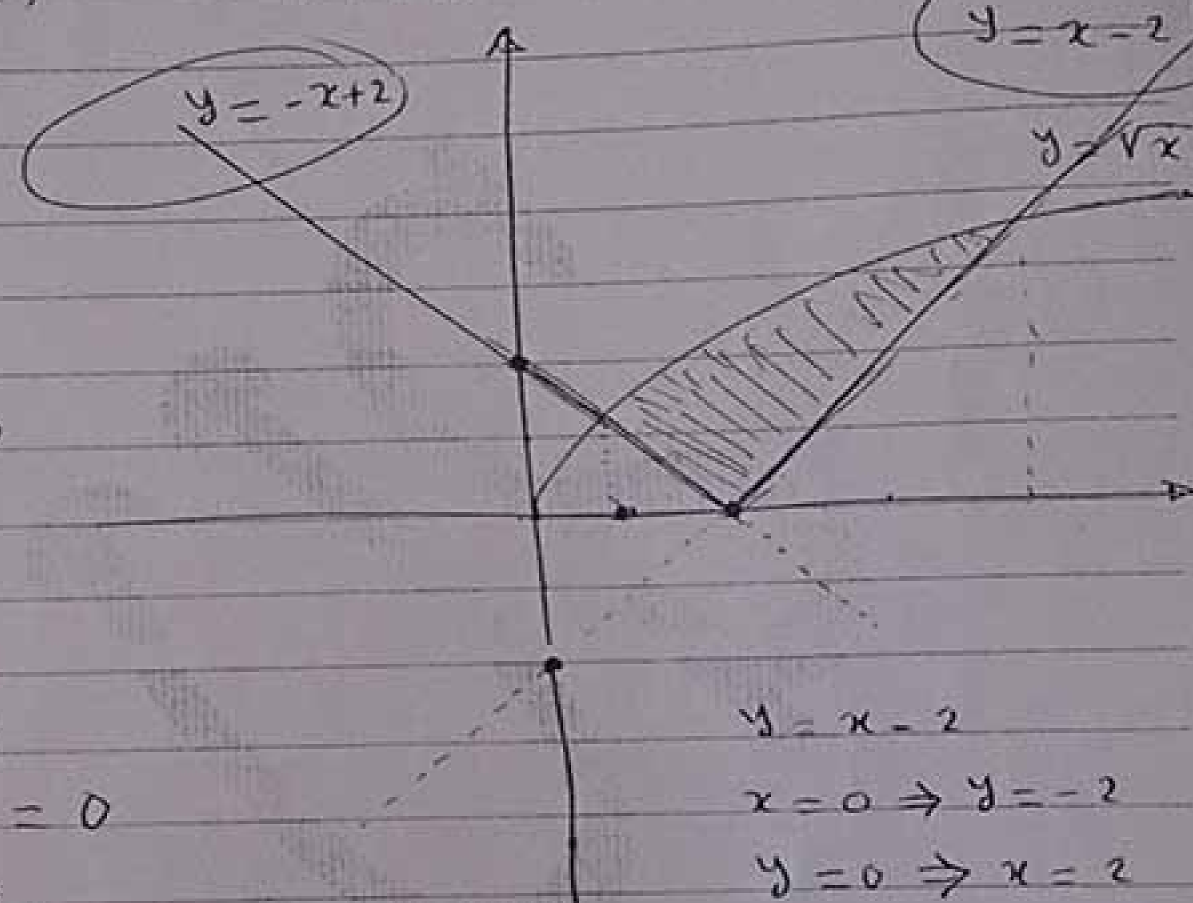


١) احسب المساحة المحصورة بين

$$y = |x-2|$$
$$y = \sqrt{x}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x-2 \geq 0 \ , \ x \geq 2 \\ -(x-2) & x-2 \leq 0 \ , \ x \leq 2 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x}$$



$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$
$$= |x-2| - \sqrt{x}$$
$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow$$
$$|x-2| - \sqrt{x} = 0$$

$$|x-2| = \sqrt{x}$$
$$(x-2)^2 = x$$
$$(x^2-2)^2 - x = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 - x = 0$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$(x-4)(x-1) = 0$$
$$x = 1 \ , \ x = 4$$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	—	0	+	
				المساحة			

$$y = x-2$$
$$x = 0 \Rightarrow y = -2$$
$$y = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y = -x+2$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 2$$
$$y = 0 \Rightarrow x = 2$$

نلاحظ من الرسم أن $y=\sqrt{x}$ أعلى من $|x-2|$ في المساحة المطلوبة.

$$S = -\int_1^4 \left(|x-2| - \sqrt{x}\right) dx$$

$$= \int_1^4 \left(\sqrt{x} - |x-2|\right) dx$$

$$= \int_1^2 \left[\sqrt{x} - (-x+2)\right] dx + \int_2^4 \left[\sqrt{x} - (x+2)\right] dx$$

$$S = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^4 = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$$

10. احسب المساحة المحصورة بين التابعين

$f(x) = y = 2x - x^2$

$g(x) = y = x^4$

شرط التقاطع

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$
$$= 2x - x^2 - x^4$$
$$-x^4 - x^2 + 2x = 0$$
$$x^4 + x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^3 + x - 2) = 0$$
$$x(x-1)\underbrace{(x^2+x+2)}_{\text{موجب دوماً}} = 0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

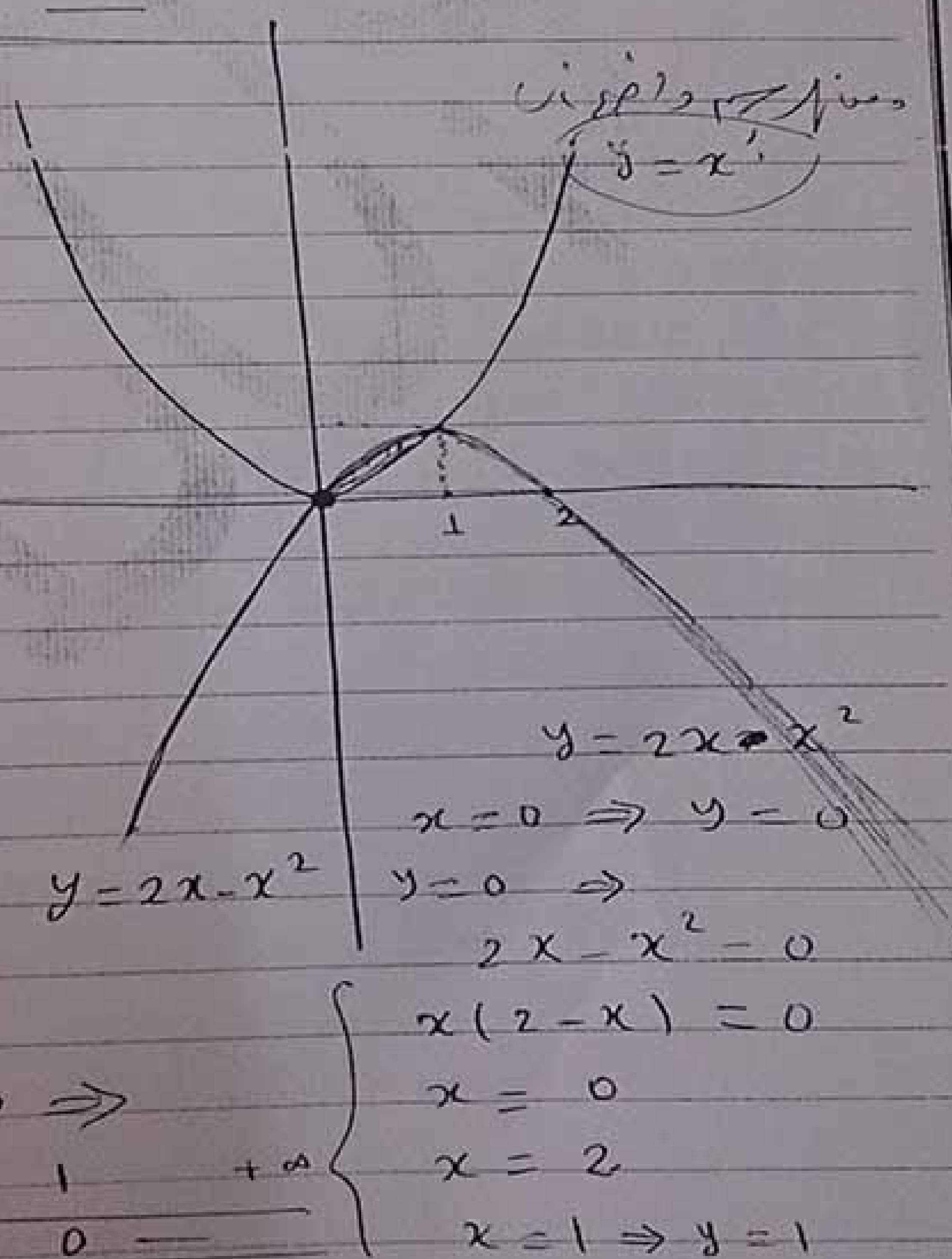
المساحة

$$S = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{5}$$

$$S = \frac{7}{15}$$ وحدة مساحة



$y = 2x - x^2$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow$

$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$x = 0$

$x = 2$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$

$y = 2x - x^2$

$y' = 2 - 2x \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$

$x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	1	$\searrow$	