المتتاليات الجزئية:

لتكن $\{x_m\}$ متتالية من $\mathbb{R}^n$ ولتكن $\{m_i\}$ متتالية من الأعداد الطبيعية الموجبة بحيث $1 \le m_1 < m_2 < m_3 \dots < m_k$

عندئذ نسمي المتتالية $\{x_{m_i}\}$ بالمتتالية الجزئية من $\{x_m\}$.

طريقة تشكيل المتتالية الجزئية:

نقوم باختيار عنصر من عناصر المتتالية الأصلية ونضعه أول عنصر من المتتالية الجديدة بحيث نهمل جميع العناصر الواقعة قبله ثم نأخذ عنصراً آخر من المتتالية الأصلية ونضعه العنصر الثاني في المتتالية الجديدة ونهمل جميع العناصر الواقعة قبله وهكذا نحصل على متتالية جديدة التي عناصرها

$x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_n}, \dots$

مبرهنة:

إذا كانت $\{x_m\}$ متقاربة في $\mathbb{R}^n$ من العنصر x فإن المتتالية الجزئية $\{x_{k_m}\}$ متقاربة من x.

$a, a, a \to a$

$b, b, b \to b$

متتاليات جزئية

$a \ne b$

$\{x_m\}$ متقاربة من x في $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 ; \exists N_0 \in N , m \ge N_0 \Rightarrow \|x_m - x\| < \varepsilon$.

أي أن أي عنصر من عناصر المتتالية دليله أكبر أو يساوي N_0 يكون بعده عن x أقل من ε.

* أي عنصر من الأصلية ليكن أكبر من N_0 سيكون من عناصر من $\{x_{k_m}\}$ لأن عناصر المتتالية الجزئية نفس عناصر المتتالية الأصلية.

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N_0 \in \mathbb{N} , k_m > N_0 \Rightarrow \|x_{k_m} - x\| < \varepsilon$$

أي أن المتتالية $\{x_{k_m}\}$ متقاربة من x.

نتيجة: إذا وجدت متتاليتين جزئيتين متقاربتين من نهايتين مختلفتين لمتتالية ما فإن المتتالية الأصلية تكون متباعدة حتماً.

"متتالية كوشي" صحيحة في أي فضاء كان

كل متتالية متقاربة هي كوشية

نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها متتالية كوشية في $\mathbb{R}^n$ إذا تحقق

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N_0 \in \mathbb{N} , m > n \geq N_0 \Rightarrow \| x_m - x_n \| < \varepsilon$$

نتيجة: البرهان

$\{x_m\}$ متقاربة في $\mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$ $\{x_m\}$ هي متتالية كوشية.

$\{x_m\}$ متقاربة $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 ; \frac{\varepsilon}{2} > 0 , \exists N_1 \in \mathbb{N} , m \geq N_0$

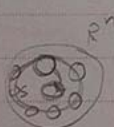
$$\Rightarrow \| x_m - x \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\{x_n\}$ متقاربة في $\mathbb{R}^n$ من x $\Leftarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 ; \frac{\varepsilon}{2} > 0 , \exists N_2 \in \mathbb{N} , n > N_2 \Rightarrow \| x_n - x \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\exists N_0 = \max(N_1, N_2)$

$$\| x_m - x_n \| = \| x_m - x + x - x_n \| = \| (x_m - x) + (x_n + x) \|$$



$$\leq \| x_m - x \| + \| - x_n + x \|$$

$$\leq \| x_m - x \| + |-1| \, \| x_n - x \|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

مبرهنة: كل متتالية كوشية في $\mathbb{R}^n$ تكون متقاربة في $\mathbb{R}^n$ صحيحة في $\mathbb{R}^n$ أو بالفضاء التام.
نقبل بدون برهان

ملاحظة: نقول عن الفضاء أنه فضاء تام إذا وفقط إذا كانت كل متتالية كوشية منه متقاربة فيه. $\mathbb{R}^n$ فضاء تام

مثال: $x =]0,1[$: $a_n = \frac{1}{n}$

$\{a_n\}$ متتالية كوشية لأن $\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists N_0 \in \mathbb{N}, \; m > n \geq N_0$

$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Longrightarrow$ في $\mathbb{R}$ نأخذ فيه مطلق

لأنه $m > n \Longrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < 0 < \varepsilon$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} > 0 > -\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

ولكن $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin]0,1[$

غير متقاربة

"مثال عن متتالية كوشية غير متقاربة".

المجموعات المتراصة في $\mathbb{R}^n$:

التغطية: لتكن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعة جزئية ولتكن $U = \{U_i : i \in I\}$ جماعة من المجموعات المنتهية أو الغير المنتهية والمحدودة والغير محدودة.

نقول عن U أنها تشكل تغطية لـ S إذا تحقق الشرط التالي. "$S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$" وتكون هذه التغطية مفتوحة إذا كانت المجموعة عبارة عن مجموعات مفتوحة.

التراص: نقول عن المجموعة S المحتواة في $\mathbb{R}^n$ أنها متراصة إذا حوت كل تغطية مفتوحة لـ S تغطية جزئية(1) منتهية(2)

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \subseteq \bigcup U_i$$

/ /

مثال: لتكن $A=\{a_1,\dots,a_r\}$ وهذه المجموعة محتواة في $\mathbb{R}^n$ ولتكن $\{U_i : i\in I\}$ تغطية مفتوحة لـ A
أثبت أن A: متراصة.

يجب برهان أن تغطية جزئية منتهية محتواة بالتغطية المفتوحة

A عبارة عن مجموعة منتهية

الحل: $\{U_i : i\in I\}$ فرضاً هي تغطية مفتوحة لـ A أي:
$A\subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ وبالتالي

يوجد لكل عنصر a_0 و A مجموعة U_{i_0} و V بحيث $(a_{i_0}\in U_{i_0})$
تغطية منتهية وبالتالي

$$A=\{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\dots\cup\{a_r\}\subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

أي وجدنا تغطية جزئية منتهية للمجموعة A محتواة بالتغطية المفتوحة U
ف المجموعة A مجموعة متراصة "

نتيجة: (كل مجموعة منتهية هي مجموعة متراصة)

نظرية هاين بوريل: لتكن $S\subseteq\mathbb{R}^n$ مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^n$
نقول عن S أنها متراصة في $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.
(لأن مغلقة ومحدودة ← متراصة)

$A=]0,1[$ حسب بوريل غير متراصة

تمرين: $A=]0,1[\subseteq\mathbb{R}$ (1) أثبت أن $U_n=]\frac{1}{n+1},1[$ (2) $\{n=1,\dots\}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ A،
(2) أثبت أن A غير متراصة.

برهان التغطية: لازم برهن أن $A\overset{?}{\subseteq}\bigcup_{n\geq1}U_n$

$$\forall x\in A;\quad 0<x<1 \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*;\ nx>1$$
$$\Rightarrow x>\frac{1}{n}$$

فرضت $y=1$

/ /

نسمي n_0 العدد الذي يسبق n

$n = n_0 + 1 \Leftarrow n - 1 = n_0$

$\frac{1}{n_0+1} < x < 1$ أي أن.

$\Rightarrow x \in \left] \frac{1}{n_0+1}, 1 \right[$

$\Rightarrow x \in \bigcup U_n \quad n \geq 1$

تذكرة بخاصة أرخميدس

x, y ومهما كان $x > 0$ فإنه يوجد عدد صحيح $\exists n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $nx > y$

للتمرين رقم 2 خذ $x > 0$ ، $y = 1$.

تتمة الحل:

U_n تغطية لـ A وبما أن عناصر هذه التغطية هي مجالات مفتوحة

منه (V_n) تغطية مفتوحة لـ A

* اثبات أن A غير متراصة:

لنفرض جدلا أن A متراصة أي توجد تغطية جزئية منتهية لـ A

محتواة من التغطية U_n. (التغطية منتهية محتواة من التغطية الأصلية)

$$A \subseteq \left] \frac{1}{n_1+1}, 1 \right[\cup \left] \frac{1}{n_2+1}, 1 \right[\cup \dots \cup \left] \frac{1}{n_t+1}, 1 \right[\subseteq \bigcup_{n \geq 1} U_n$$

نفرض $n = \operatorname{Sup}\{n_1, n_2, \dots n_t\}$.

$\Rightarrow n \geq n_i \quad : i = 1, \dots t$

$\Rightarrow 1 + n \geq n_i + 1 \quad i = 1, \dots t$

$\Rightarrow \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n_i+1} \quad : i = 1, \dots t$

ولكن $0 < \frac{1}{1+n} < 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \in A$

$U_n = \left] \frac{1}{n+1}, 1 \right[$ لأن $\frac{1}{n+1} \notin U_n$

وهذا تناقض كون

U_n تغطية منتهية لـ A ومنه A غير محتواة في $\bigcup_{n \geq 1} U_n$

$\Leftarrow A$ غير متراصة.

تمرين مشابه لسابقه $A =]-1, 1[\subseteq \mathbb{R} \Leftarrow U_n = \{N(0, 1-\frac{1}{n}) ; n \geq 1\}$

وهو أرجو ... هنا نطبق

$y = 1$ $-1 < x < 1$ نضرب ب $n(1-x)$

$(1-x) > 0 \Longrightarrow n(1-x) > 1$

$1 - x > \frac{1}{n}$

$x < 1 - \frac{1}{n}$

$N(0, 1-\frac{1}{2})$

$N(0, 1-\frac{1}{k})$

• المجموعات المترابطة في $\mathbb{R}^n$:

لتكن $S \subseteq \mathbb{R}^n$، نقول عن S أنها غير مترابطة إذا وجدت مجموعتان مفتوحتان u, v بحيث $S \cap u \neq \emptyset$ و $S \cap v \neq \emptyset$

$$(S \cap u) \cup (S \cap v) = S$$
$$(S \cap u) \cap (S \cap v) = \emptyset$$

أي إذا استطعنا تجزئة S إلى قسمين منفصلين نسمي المجموعتين u, v منفصلاً للمجموعة S.

• مثال : $S =]\underbrace{1, 3}_{u}[\cup]\underbrace{4, 5}_{v}[$

$u =]1, 3[$, $v =]4, 5[$

$u \cap S =]1, 3[\neq \emptyset$

$v \cap S =]4, 5[\neq \emptyset$

$(u \cap S) \cup (v \cap S) = S$

$(u \cap S) \cap (v \cap S) = \emptyset$

$\Rightarrow$ S غير مترابطة. «نسمي u, v فصلاً للمجموعة S»

نتائج :

• المجموعة وحيدة العنصر دوماً مترابطة في $\mathbb{R}^n$.

• المجموعة الخالية وحيدة العنصر مترابطة.

• المجموعة الـ $\mathbb{R}^n$ مترابطة.

$\emptyset, \mathbb{R}^n, \{a\}$ مترابطة

غير مترابطة

① $S \cap U \neq \emptyset$

② $S \cap V \neq \emptyset$

③ $(S \cap V) \cup (S \cap U) = S$

④ $(S \cap V) \cap (S \cap U) = \emptyset$

مترابطة — لازم تكون مجال

أن نصل بين أي نقطتين بخط ... في S.

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية $S \subset \mathbb{R}$ مترابطة هو أن تكون S مجال (مفتوح أو مغلق أو نصف ...)

الاثبات: بدون برهان.

أمثلة:

$[0,1] \cup [2,4]$ ليس مجال — غير مترابطة "ما هي مجال"

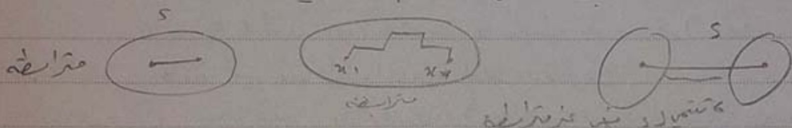
$[0,1] \cup [1,2] = [0,2]$ — مجال — مترابطة

$[0,1] - [0,\frac{1}{2}] = [\frac{1}{2},1]$ — مجال — مترابطة

$[0,1] \cap [\frac{1}{2},1] = [\frac{1}{2},1]$ — مجال — مترابطة

مبرهنة بدون برهان

لتكن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مفتوحة في $\mathbb{R}^n$، تكون S مترابطة إذا، فقط إذا أمكن أن نصل بين أي نقطتين من S بخط مضلع محتوى بالكامل في S.



- المجموعة الخالية مترابطة "ما فيها نقاط"

"حل تمرين للمحاضرة 6"