وظيفة: برهن $C[a,b]$ المؤلفة من مجموعة الأعداد الحقيقية المستمرة على المجال $[a,b]$ هو فضاء منظم حيث

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} (x(t))$$

لا نهتم بحل برهن شروط الأمثلة

أثبت أن هذا النظيم غير متولد من جداء داخلي

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

نأخذ المثالين:

$$\text{①}\ \left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{t-a}{b-a} \\ y(t) &= \frac{b-t}{b-a} \end{aligned}\right\} \qquad \text{②}\ \left\{\begin{aligned} x(t) &= \sin t \\ y(t) &= 2 \end{aligned}\right. \quad t\in[0,2\pi]$$

الحل: نأخذ مثال (1)

$$x(t) = \frac{t-a}{b-a} , \quad y(t) = \frac{b-t}{b-a}$$

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = \max_{t\in[a,b]} \left|\frac{t-a}{b-a}\right| = 1$$

$$\|y\| = \max_{t\in[a,b]} \left|\frac{b-t}{b-a}\right| = 1 , \quad \|x+y\| = \max_{t\in[a,b]} |(x+y)(t)| = 1$$

$$(x+y)(t) = \frac{b-a}{b-a} ,$$

$$(x-y)(t) = \frac{2t-b-a}{b-a}$$

$$\|x-y\| = \max_{t\in[a,b]} |(x-y)(t)| = \max_{t\in[a,b]} \left|\frac{2t-b-a}{b-a}\right| = 1$$

$$l_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 1+1 = 2$$
$$l_2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] = 2(1+1) = 4$$

" دالة النظيم غير مولّدة من جداء داخلي "

نأخذ دالة (2) :

$x(t) = \sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$

$y(t) = 2$

$$\|x\| = \max_{t \in [0,2\pi]} [\sin(t)] = 1 \quad , \quad \|y\| = 2$$

$$\|x+y\| = \max_{t \in [0,2\pi]} |\sin t + 2| = 3$$

لانعوض $\frac{\pi}{2}$ بيطلع 1

ح $(1-2) = -1$

لانعوض $(-\frac{\pi}{2})$ بيطلع (-1)

ح $(-1-2) = -3$

وغنابدال الناس مناخد $\frac{\pi}{2}$

$3\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$$\|x-y\| = \max_{t \in [0,2\pi]} |\sin t - 2| = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = 9+9 = 18 \\ l_2 = 2[1+4] = 10 \end{array}\right\} l_1 \neq l_2$$

لا دالة غير محققة لأن الفضاء غير مولد من جداء داخلي "

تمرين (2) : بيّن أنه يمكن أن نضع بدلاً من الشرط

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

من تعريف النظيم الشرط

$$\|x\| = 0 \implies x = 0$$

دون المساس بمفهوم النظيم.

1) $\|x\| \geq 0$
2) $\|\alpha x\|$
3) $\|x+y\|$

تخفيف — استطيع كتابة $\Rightarrow \|x\| \neq 0 \Rightarrow x = 0$

/ /

---

② ثم بيّن أن الشرط $\|x\| \geq 0$ ينتج من الشرطين التاليين :

مراجحة المثلث $\|x+y\|$, $\|\alpha x\|$

الحل:

① لنبرهن أنه يكفي أن : $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$.

لنفرض أن $x = 0$

ولنفرض جدلاً أن $\|x\| \neq 0$

$$x = 0 \Rightarrow x + x = 0 + x$$

$$\Rightarrow 2x = x$$

$$\Rightarrow \|2x\| = \|x\| \Rightarrow 2\|x\| = \|x\|$$

خاصية α

ولكن شروط النظيم محققة ، انتبه ($\|x\| \neq 0$) [illegible]

وهذه المساواة $\Rightarrow 2 = 1$

خاطئة فالفرض الجدلي خاطئ.

$$x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$$

((أنا برهنت [illegible] للاختصار [illegible]))

② إن $\|0\| = 0$

$$0 = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\|$$
$$\leq \|x\| + |-1|\,\|x\|$$
$$\leq \|x\| + \|x\|$$
$$\leq 2\|x\|$$

نقسم على 2

$$\Rightarrow \|x\| \geq 0$$

أي أن الشرط ينتج من الشرطين 3 , 4

شكراً [illegible]

„ لاتحزن إنْ ضاعت منك نجمة في السماء
فلربما تكون من نصيبك القمر „

#

/ / مما يخص معتمدًا بأنها رجات .

تمرين $X = C[a,b]$ فضاء الدوال الحقيقية المستمرة على $[a,b]$ ولتكن $\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$ ، أثبت أن $(X, \|\cdot\|)$ فضاء منظم ،

نتحقق من الشروط

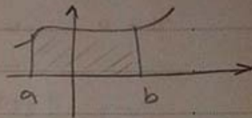
1) $\|x\| \geq 0$

التكامل المحدود يمثل مساحة دالة القيمة المطلقة

2) $\|x\| = 0 \iff \int_a^b |x(t)|\,dt = 0$

$\Rightarrow (x(t)) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$. والمساحة موجبة

$\Rightarrow x = 0_{C[a,b]}$.



3) $\forall x \in C[a,b] \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

$$\|\alpha x\| = \int_a^b |\alpha x(t)|\,dt$$

من خواص القيمة المطلقة

$$= \int_a^b |\alpha|\,|x(t)|\,dt$$

$$= |\alpha| \int_a^b |x(t)|\,dt = |\alpha|\,\|x\| \quad \#$$

$\forall x, y \in C[a,b]$

4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ من برهان متراجحة المثلث

$|(x+y)(t)| = |x(t) + y(t)|$ من خواص القيمة المطلقة

$\leq |x(t)| + |y(t)| \quad \forall t \in [a,b]$ ثم خذ تكامل الحدود

$$\Rightarrow \int_a^b |(x+y)(t)| \leq \int_a^b |x(t)|\,dt + \int_a^b |y(t)|\,dt .$$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Rightarrow$ $(x, \|\cdot\|)$ فضاء منظم

تمرين . $x = C[a,b]$ فضاء الدوال الحقيقية المستمرة على $[a,b]$ ولتكن

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \cdot X \longrightarrow R$$

$$(x, y) \longmapsto \int_a^b x(t)\cdot y(t)\,dt$$

أثبت أن $(x, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء داخلي

الحل: تأجل المحاضرة 17 .