المحاضرة الرابعة عشرة

الأحد 11/5/2014

الموضوع: تعريف القياس وخواصه.

- مراجعة في نظرية المجموعات.
- مراجعة في الطوبولوجيا.
- مقدمة في نظرية القياس.

* تعريف الحلقة / الحلقة التامة.

[الحلقة مغلقة لكافة العمليات عدا المتمم و الحلقة التامة مغلقة بالنسبة للاجتماع المعدود]

الحلقة الأصغرية المولدة بالصف (الجماعة) D [من أجزاء X]

* الجبر / الجبر التام ← (للمجموعات المنتهية)

الجبر التام: هو جبر ولكنه مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود ويرمز له (σ-جبر)

$$\forall A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

$$\forall A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$ استنتاجاً (لأن المتمم ينتمي لـ $\mathcal{A}$)

- الجبر الأصغري المولد بالصف D [أصغر جبر يحوي D]

- جبر بوريل: إذا كانت $X \neq \phi$ و τ تمثل طبولوجيا على X عندئذٍ جبر بوريل: هو أصغر جبر يحوي τ ويرمز له بـ: $B(X)$

سؤال: هل كل طبولوجيا حلقة و هل العكس صحيح ؟؟

الجواب: لا يوجد علاقة بينهما.

سؤال: هل كل جبر حلقة ؟؟ و هل كل حلقة جبر ؟؟
الجواب: نعم كل جبر هو حلقة و لكن العكس غير صحيح بالضرورة

مثال: لتكن $X=\{1,2,3,4\}$
إن $\{\phi,\{1,2\},\{3\},\{1,2,3\},X\}$ تمثل طبولوجيا ولكنها لا تمثل حلقة.
ليكن: $D=\{\{1,2\},\{3\}\}$
إن $\tau=\{\phi,\{1,2\},\{3\},\{1,2,3\}\}$ حلقة
و $A=\{\phi,\{1,2\},\{3\},\{1,2,3\},X,\{3,4\},\{1,2,4\},\{4\}\}$
هو جبر

ملحوظة: إذا كانت الطبولوجيا منتهية عندئذٍ كل جبر امثل طبولوجيا ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

- الطبولوجيا المألوفة المعرّفة على $\mathbb{R}$:
$\tau=\{A ; A\subseteq \mathbb{R} : \forall x\in A , \exists\ a,b\in\mathbb{R} : x\in\,]a,b[\, \subseteq A\}$ [هي عبارة عن مجالات مفتوحة].
$]a,a[=\phi$, $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$, $]a,b[\,\cup\,]d,c[$
ملاحظة: الطبولوجيا ليست مغلقة بالنسبة للتقاطع.
$B(\mathbb{R})$ يرمز لجبر بوريل على $\mathbb{R}$

مثال: لتكن $J=\{]a,b[: a,b\in\mathbb{R} ; a<b\}$
إن جبر بوريل لهذه المجموعة هو:
$]a,b[$, $]-\infty,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$, $[a,b]$
$[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$

ملاحظة: يُطلب في الامتحان إن وردْ بناء جبر بوريل على مجموعة منتهية

(اصطلاحاً)

$\mu(\mathbb{Z}) = +\infty \quad \mu(\mathbb{N}) = +\infty$

تعريف القياس: ليكن $X \neq \phi$ نعرّف القياس بأنه تابع بالشكل:

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$$

قد تكون جبر-σ عناصره مجموعات منتهية

قد تكون جبر عناصره مجموعات منتهية

بحيث يحقق:

1) $\mu(\phi) = 0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{A} \; ; A_i \cap A_j = \phi \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

ملاحظات:

1) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ يدعى بفضاء القياس.

2) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A) \geq 0$

3) μ قياس منته $\text{if } A \in \mathcal{A} : \mu(A) < +\infty$

4) $\mu(X) = 1$ ولدينا $0 \leq \mu(A) \leq 1$ عندئذٍ ندعو $(X, \mathcal{A}, \mu)$ بفضاء الاحتمال.

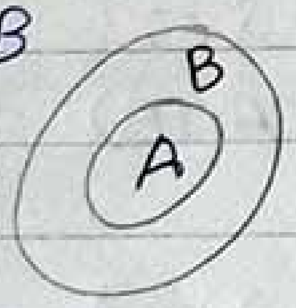
خواص القياس:

1] الخاصة الطردية:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

الإثبات:

$A \subseteq B \qquad B = A \cup (B \setminus A)$



$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A))$$
$$= \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$$

2] الخاصية الفوقية:

$\forall A,B \in \mathcal{A} : A \subseteq B \to \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

الإثبات: استنتاجاً من 1 .

3] الخاصية نصف الجمعية:

$\forall A_i \in \mathcal{A} \to \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, $i \in \mathbb{N}$

4] خاصية الاستمرار من الأدنى (استمرار الاجتماع):

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ (متتالية متزايدة)

$A_n \subseteq A_{n+1} \to$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

5] خاصية الاستمرار من الأعلى (استمرار التقاطع):

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ (متتالية متناقصة)

$A_n \supseteq A_{n+1} \to$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

تمرين 1: إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءً قياسياً فالمطلوب:

أثبت أنه:

$\forall A,B \in \mathcal{A} \to \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

تمرين 2:

$\forall A,B \in \mathcal{A} \wedge \mu(A \Delta B) = 0$

$\to \mu(A) = \mu(B)$

أمثلة عن القياسات :

1) قياس العد : إذا كان $X \neq \phi$:

$$\mu : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$$

$$\mu(A) = \begin{cases} n = |A| \ ; & A \text{ منتهية} \\ & (n \text{ عدد عناصر } A) \\ +\infty \ ; & A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

وهو حقيق قياس (تحقق).

2) قياس ديراك : ليكن $X \neq \phi$ ، ولتكن $a \in X$ (ثابت)

$$\mu_a : P(X) \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 1 \ ; & a \in A \\ 0 \ ; & a \notin A \end{cases}$$

مثال توضيحي : $X = \{1, 2\}$

$$\Rightarrow P(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$\Rightarrow \mu_1(\phi) = 0 \ , \ \mu_1(1) = 1 \ , \ \mu_1(\{2\}) = 0$$

$$\mu_1(\{1, 2\}) = 1$$

3) قياس المجالات :

$$\mu : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$$

$$I =]a, b[\Rightarrow \mu(I) = b - a$$

4) إذا تم تعميم قياس المجالات يسمى بقياس لوبيغ

مثال توضيحي : أوجد قياس المجموعة :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n + 4^{-n}, n + 2^{-n}]$$

الحل:

$$n=1 \to \left[1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}\right]$$

$$n=2 \to \left[2+\left(\frac{1}{4}\right)^2, 2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$n=3 \to \left[3+\left(\frac{1}{4}\right)^3, 3+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]$$

نلاحظ أنّ A_i هي مجموعات منفصلة مثنى مثنى وأنّ $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$i \in [1, +\infty[$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2^{-n}) - (n+4^{-n})\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ملاحظة: متسلسلتان هندسيتان متقاربتان لأنّ الأساس أصغر من الواحد.

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

تذكرة بالمتسلسلة الهندسيّة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad ; \quad r<1$$

القياس الخارجي:

تعريف: إذا كان لدينا مجموعة ما: $X \neq \phi$ وليكن $P(X)$ مجموعة

أجزاء X وليكن P صف من أجزاء X ، نعرّف القياس الخارجي أنّه تطبيق :

$$\mu^* : P \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0 , \infty]$$

نقول عن μ^* إنّه قياس خارجي على P (على X) إذا تحققت الشروط :

1) $\mu^*(\phi) = 0$

2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \; ; \; \forall A, B \in P$

3) $\forall A_i \in P,\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

انتهت المحاضرة الرابعة عشر