س ١: بين ان الدالة $f(x)=\ln x$ متزايدة على $]0,+\infty[$

وان الدالة $g(x)=1-e^{2x}$ متناقصة .

الحل

1) $f(x)=\ln x$ التابع معرف ومستمر على $]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{x}>0 \Rightarrow f$ متزايدة

حل تمارين الفصل الأول

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+ \quad + \quad +$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} \ln x = -\infty$$

---

2) $g(x)=1-e^{2x}$

تابع معرف ومستمر على $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

$g'(x)=-2e^{2x}<0 \Rightarrow g$ متناقصة

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad - \quad - \quad -$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-e^{2x}) = 1-0 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-e^{2x}) = 1-(+\infty) = -\infty$$

س٥: بين أية من الدوال ذات تغير محدود، وأوجد لها التغير الكلي في كل من الحالات التالية

* $f(x) = x - |x|$ حيث $x \in [-5, 5]$

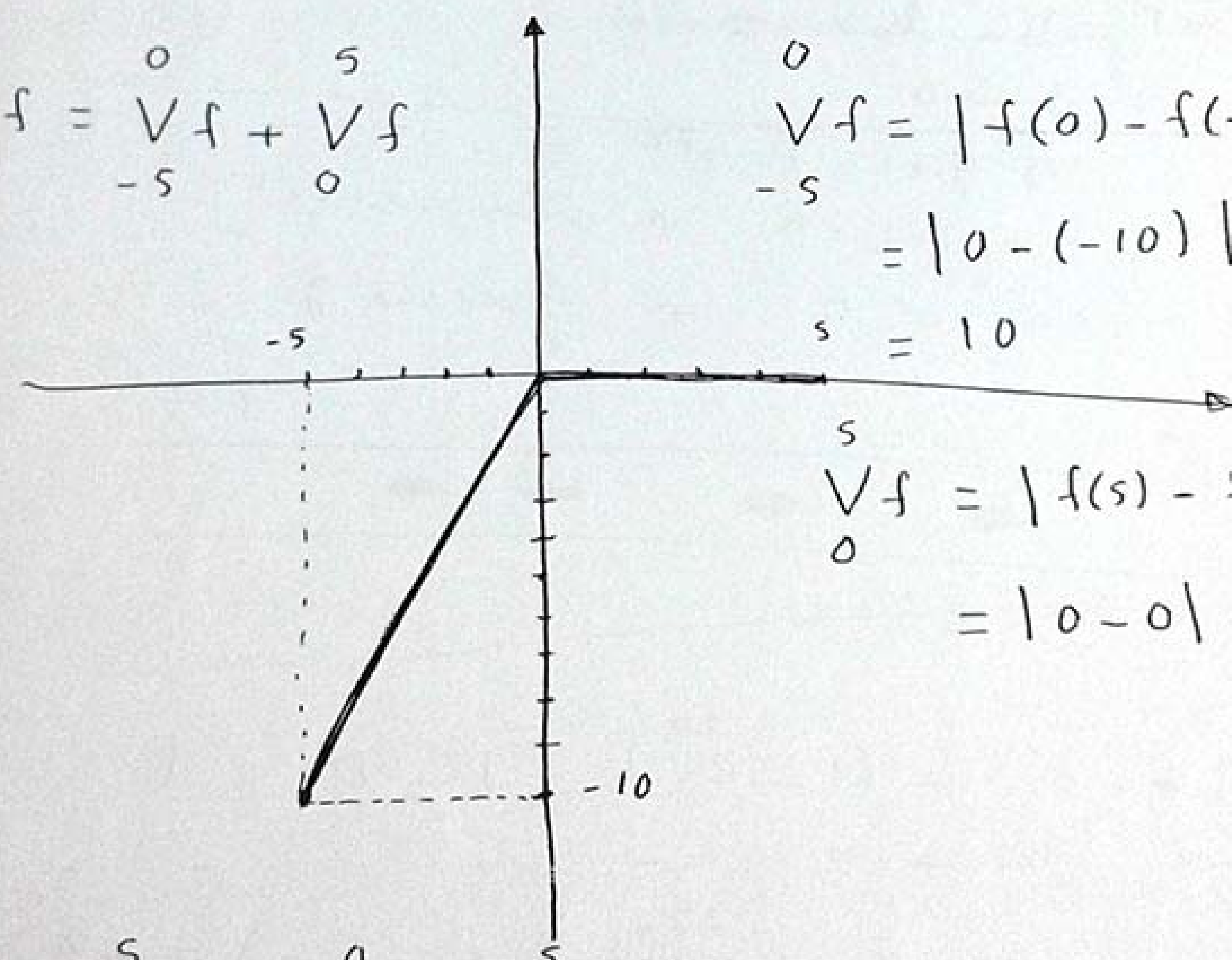
$$|x| = \begin{cases} x & 5 \geq x \geq 0 \\ -x & -5 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - x & 0 \leq x \leq 5 \\ x - (-x) & -5 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 5 & \text{متزايدة} \\ 2x & -5 \leq x \leq 0 & \text{متزايدة} \end{cases}$$

$$\bigvee_{-5}^{5} f = \bigvee_{-5}^{0} f + \bigvee_{0}^{5} f$$

$$\bigvee_{-5}^{0} f = |f(0) - f(-5)| = |0 - (-10)| = 10$$



$$\bigvee_{0}^{5} f = |f(5) - f(0)| = |0 - 0| = 0$$

$$\bigvee_{-5}^{5} f = \bigvee_{-5}^{0} f + \bigvee_{0}^{5} f = 10 + 0 = 10 < \infty$$

f د.ت.م، التغير الكلي 10 .

٣/

45

بيّن أن f د. ت. م. على $[0,1]$ حيث

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x+1}$$

$$= x^2 - \left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

نلاحظ أن x^2 دالة متزايدة على $[0,1]$. $[f'(x) = 2x \geq 0]$

= = $-\frac{1}{x+1}$ = = على $[0,1]$. $\left[f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0\right]$.

وبالتالي الدالة f تكتب على شكل فرق دالتين متزايدتين .

وبالتالي f د. ت. م. على $[0,1]$.

ب/ بيّن أن f ذ.ت.م على (a,b) حيث $a<0, b>0$ ‏ (٥٠/٠٢)

$$f(x) = x - e^{x}$$

$$f'(x) = 1 - e^{x}$$

لما $e^{-x} = 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^{x} = 0 \Rightarrow e^{x} = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -1$$

x	$-\infty$	a	0	b	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ $+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗ متزايدة		-1	متناقصة ↘	$-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x - e^{x}) = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - e^{x}) = \underbrace{+\infty}_{\text{بطيء}} - \underbrace{\infty}_{\text{سرعة كبيرة}} = -\infty$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{0}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{0}{V}} f = |f(0) - f(a)| + |f(0) - f(b)|$$

$$= |-1 - (a - e^{a})| + |-1 - (b - e^{b})|$$

$$= e^{a} - a - 1 + e^{b} - b - 1 = e^{a} + e^{b} - (a+b+2) < \infty$$

بطريقة أخرى

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \int_a^b |1 - e^{x}|\,dx = \int_a^0 (1 - e^{x})\,dx - \int_0^b (1 - e^{x})\,dx$$

$$= [x - e^{x}]_a^0 - [x - e^{x}]_0^b$$

$$= [(-1) - (a - e^{a})] - [(b - e^{b}) - (-1)] = e^{a} - a - 1 - (b + 1 - e^{b})$$

$$= e^{a} + e^{b} - (a+b+2)$$

ع.م

س٥) هل f د. ت. م على $[0,2\pi]$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x} & 0<x\leq 2\pi \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

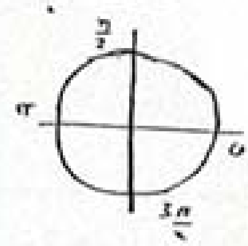
$P \Rightarrow q$

$q' \Rightarrow P'$

لنبين أن f دالة ليست د. ت. م على $[0,2]$ وبالتالي ليست د. ت. م على $[0,2\pi]$

وذلك بأخذ التجزئة التالية:

$$x_0=0<\frac{2}{2n+1}<\frac{2}{2n-1}<\cdots\frac{2}{5}<\frac{2}{3}<\frac{2}{1}=x_n$$



$$V(f,P)=\left|f\left(\tfrac{2}{2n+1}\right)-f(0)\right|+\left|f\left(\tfrac{2}{2n-1}\right)-f\left(\tfrac{2}{2n+1}\right)\right|+\cdots$$

$$\cdots+\left|f\left(\tfrac{2}{3}\right)-f\left(\tfrac{2}{5}\right)\right|+\left|f(2)-f\left(\tfrac{2}{3}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)-0\right|+\left|\frac{2}{2n-1}\sin\frac{2n-1}{2}\pi-\frac{2}{2n+1}\sin\frac{2n+1}{2}\pi\right|$$

$$\cdots+\left|\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}\pi-\frac{2}{5}\sin\frac{5}{2}\pi\right|+\left|2\sin\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}\pi\right|$$

$$=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n+1}+\cdots\cdots\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+2+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{4}{2n+1}+\frac{4}{2n-1}+\cdots\frac{4}{5}+\frac{4}{3}+2=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{2n+1}\right)-2$$

$$\bigvee_0^2 f=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{2n+1}\right)-2\right]=\infty$$

وبالتالي $\bigvee_0^2 f=+\infty$, الدالة f ليست ذات تغير محدود

1/

$f(x) = \cos^2 x \qquad x \in [0, \pi]$ (٩.١ / ٥٤)

$f(x) = 1 - \sin^2 x$

$f_1(x) = 1$

[0, π] على δ متزايدة

$f_2(x) = \sin^2 x$

$f_2'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$f(x) = \cos^2 x$

$f'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$

$f_2'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k$

$x = \frac{\pi}{2} k \qquad \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 0 \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ k = 2 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

طريقة $f(x) = \begin{cases} 1 - \sin^2 x & : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos^2 x - 0 & : x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

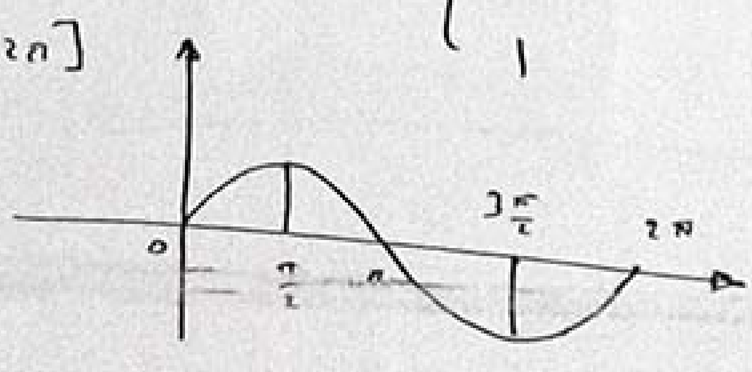
طريقة $f(x) = x - (x - \cos^2 x) \qquad x \in [0, \pi]$

مثال $f(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = x - (x - \sin x)$

$x \in [0, 2\pi]$

طريقة $f(x) = \sin x = \varphi(x) - \psi(x)$

$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}] \\ \sin x + 1 & [3\frac{\pi}{2}, 2\pi] \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\sin x & x \in [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}] \\ 1 & x \in [3\frac{\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$



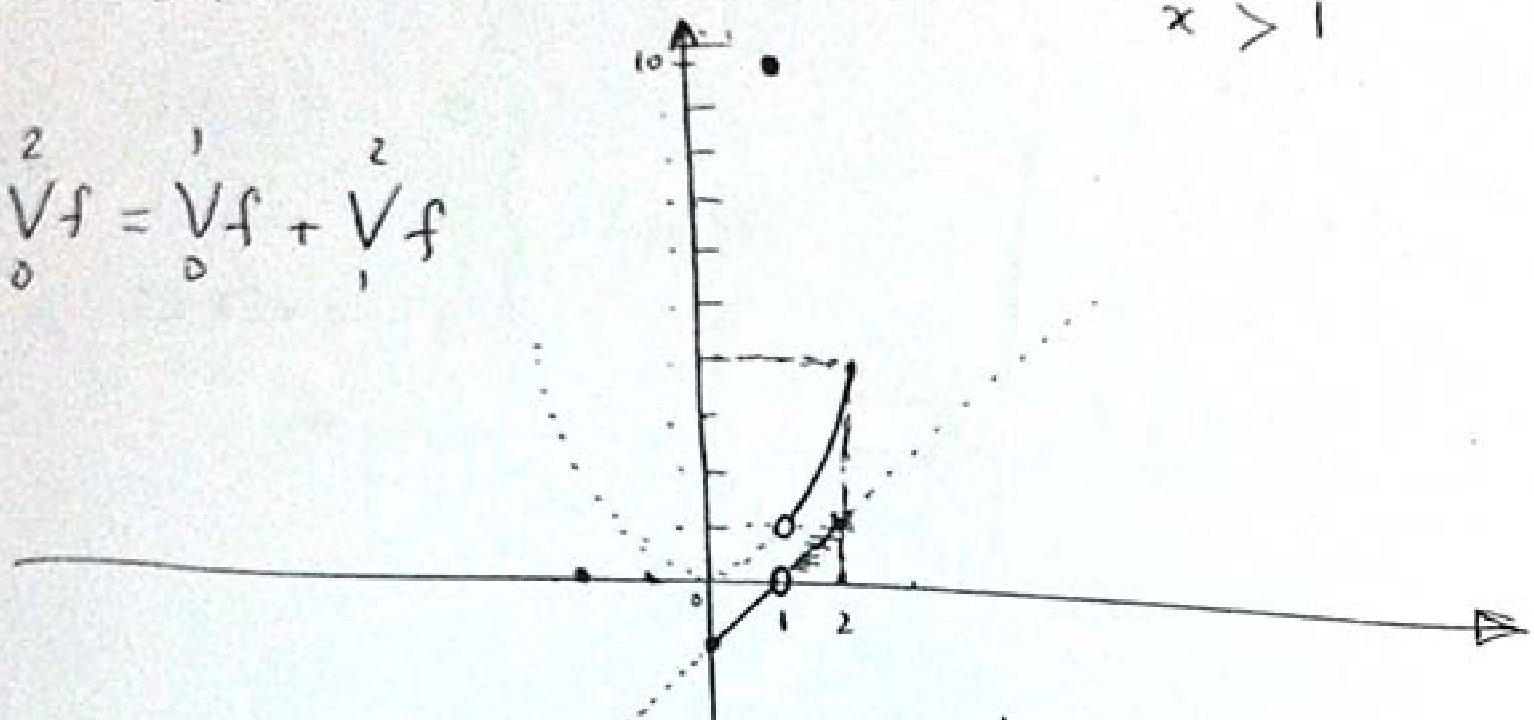
$y = \sin x$

1/ بين ان التغير الكلي للدالة هو 25 على $[0,2]$.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 1 \\ 10 & x = 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

١ ٧ / ٠٤

$$V_0^2 f = V_0^1 f + V_1^2 f$$



f متزايدة على $[0,1]$

$$V_0^1 f = |f(1) - f(0)|$$

$$V_0^1 f = |10 - (-1)| = 11$$

$$V_1^2 f = \sup_{P \in \mathbb{P}[1,2]} V(f,P) \qquad P = \{1 = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = 2\}$$

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \cdots \; |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |x_1^2 - 10| + |x_1^2 - x_2^2| + \cdots \; |x_n^2 - x_{n-1}^2|$$

$$= 10 - \cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} - \cancel{x_1^2} + \cancel{x_3^2} - \cancel{x_2^2} + \cancel{\cdots} + \underbrace{x_n^2}_{4} - \cancel{x_{n-1}^2}$$

$$V(f,P) = 10 - 2x_1^2 + 4 = 14 - 2x_1^2 \Rightarrow$$

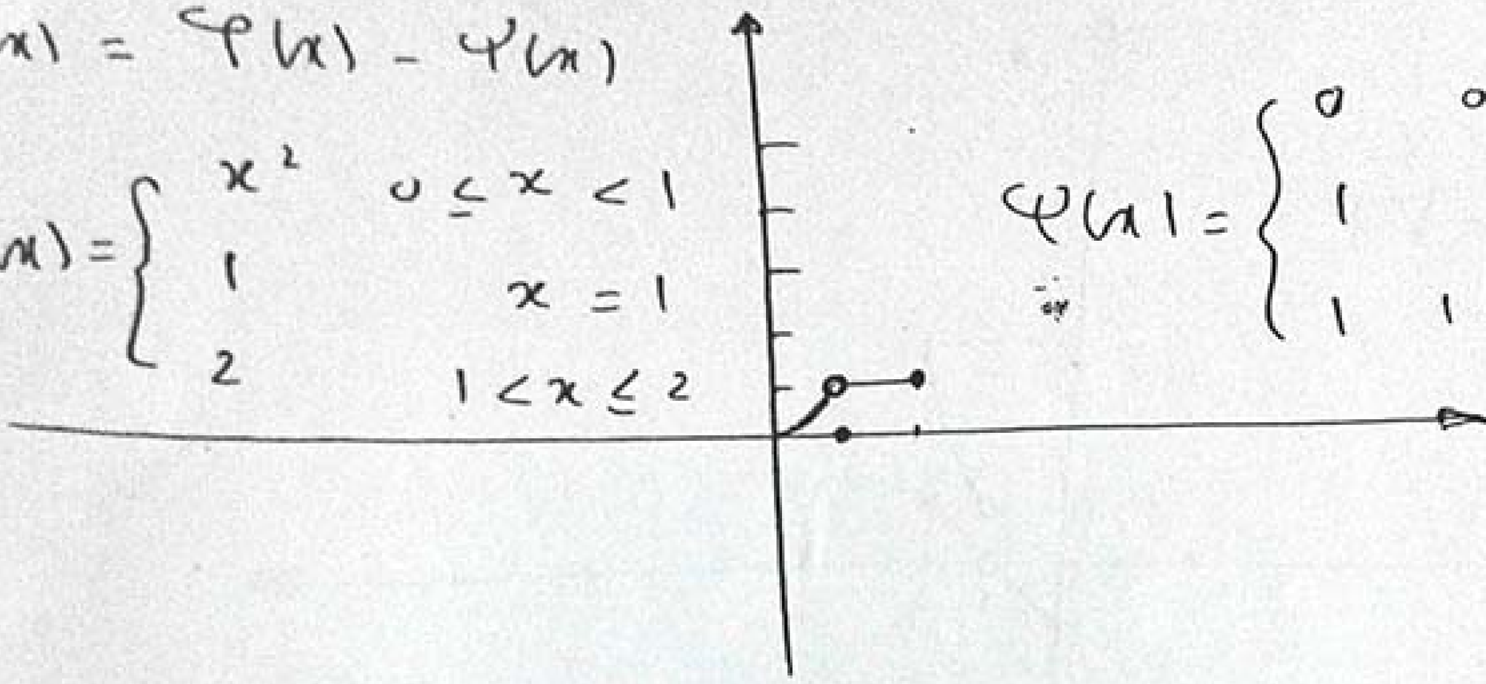
$$V_1^2 f = 12$$

$$\Longrightarrow V_0^2 f = 11 + 12 = 23.$$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 0 & x=1 \\ 1 & 1<x\le 2 \end{cases}$

$f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$

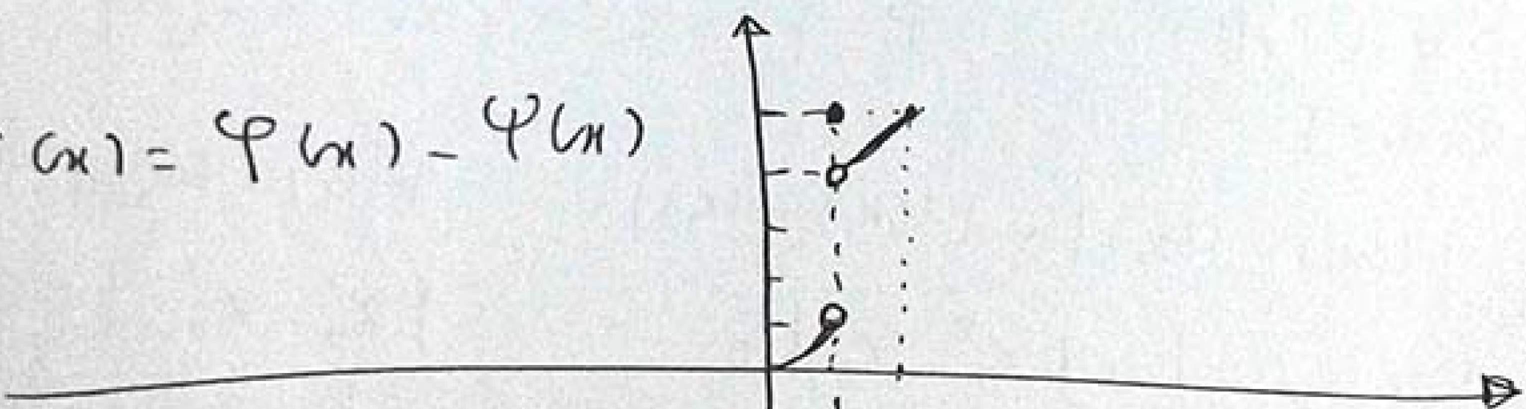
$\varphi(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \\ 2 & 1<x\le 2 \end{cases}$



$\psi(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \\ 1 & 1<x\le 2 \end{cases}$

D) $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 5 & x=1 \\ x+3 & 1<x\le 2 \end{cases}$

$f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$



$\varphi(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 5 & x=1 \\ x+5 & 1<x\le 2 \end{cases}$

$\psi(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 0 & x=1 \\ 2 & 1<x\le 2 \end{cases}$