

16/3/2014

الماضرة الثانية

المونومورفزم - الایزومورفزم - الایزومورفزم

تعريف: لكي f فئة، وليكن $u \in \mathcal{L}(A, B)$ حيث $A, B \in \text{ob}(f)$ وليكن $x \in \text{ob}(f)$.. ولناخذ التطبيق:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow u \cdot f & \downarrow u \\ & & B \end{array} \quad \alpha: \mathcal{L}(x, A) \longrightarrow \mathcal{L}(x, B)$$

$\forall f \in \mathcal{L}(x, A), \alpha(f) = u \cdot f$ المعرف بالمثل:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow g \cdot u & \downarrow g \\ & & X \end{array} \quad \beta: \mathcal{L}(B, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$\forall g \in \mathcal{L}(B, X), \beta(g) = g \cdot u$ المعرف بالمثل:

« هذان التطبيقان موجودان دوماً فيما جل أي مورفزم u وأي شيء x »

* نقول عن المورفزم u انه مونومورفزم .. إذا كان التطبيق α متباين
 * ونقول عن المورفزم u انه ايزومورفزم .. إذا كان التطبيق β متباين

تعليق

لكي f فئة .. عندئذ:

- ① تركيب مونومورفزمين هو مونومورفزم
- ② إذا كان $u, v \in \text{Mor}(f)$ و $u \cdot v$ مونومورفزم
- ③ لاجل $\forall A \in \text{ob}(f)$ ، المورفزم $I_A: A \rightarrow A$ هو مونومورفزم

البرهان

① ليكن $u \in \mathcal{L}(A, B)$ و $v \in \mathcal{L}(B, D)$ مونومورفزمين
 عندئذ $v \cdot u \in \mathcal{L}(A, D)$

وبما أن كلا من u و v مونومورفزمين فإنه لاجل أي $x \in \text{ob}(f)$ التطبيق التالي متباين:

المثال 1 $\alpha_1: f(X, A) \rightarrow f(X, B)$

$$\alpha_1(f) = u \cdot f$$

المثال 2 $\alpha_2: f(X, B) \rightarrow f(X, D)$

$$\alpha_2(g) = v \cdot g$$

المثال 3 $\alpha_0: f(X, A) \rightarrow f(X, D)$ ولنفرض هناك التطبيق α

$$\alpha_0(\varphi) = (v \cdot u) \cdot \varphi$$

$$\alpha_0(\varphi_1) = \alpha_0(\varphi_2) \quad \text{حيث } \varphi_1, \varphi_2 \in f(X, A) \quad \text{حيث } \alpha$$

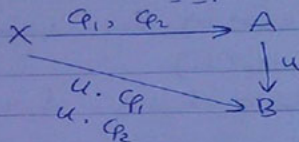
$$(v \cdot u) \cdot \varphi_1 = (v \cdot u) \cdot \varphi_2$$

$$(*) \quad v \cdot (u \cdot \varphi_1) = v \cdot (u \cdot \varphi_2)$$

$$(u \cdot \varphi_1), (u \cdot \varphi_2) \in f(X, B) \quad \text{حيث } \alpha$$

$$\text{حيث } \alpha \text{ هو تطبيق } \alpha_2 \text{ حيث } \alpha_2 \text{ يمكن أن يكون}$$

الصورة المبثثة لنزول العنصرين α_1 و α_2



أي، عبارة $u \cdot \varphi_1, u \cdot \varphi_2 \in f(X, B)$ حيث α

$$\alpha_2(u \cdot \varphi_1) = v \cdot (u \cdot \varphi_1) \quad \leftarrow (*) \quad \text{حيث } \alpha$$

$$\alpha_2(u \cdot \varphi_2) = v \cdot (u \cdot \varphi_2) \quad \leftarrow (*) \quad \text{حيث } \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha_2(u \cdot \varphi_1) = \alpha_2(u \cdot \varphi_2)$$

$$u \cdot \varphi_1 = u \cdot \varphi_2 \quad \text{حيث } \alpha_2 \text{ تطبيق ذاتي}$$

من جهة أخرى، عبارة $\varphi_1, \varphi_2 \in f(X, A)$ حيث α

$$\alpha_1(\varphi_1) = u \cdot \varphi_1 = \alpha_1(\varphi_2) = u \cdot \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{حيث } \alpha_1 \text{ تطبيق ذاتي} \quad \text{حيث } (u \cdot \varphi_1 = u \cdot \varphi_2)$$

وهذا يبين أن التطبيق α تطبيق ذاتي وبالتالي الموضع α هو صورة α في $f(X, D)$

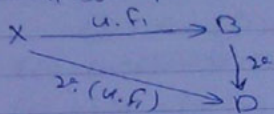
② ليكن $u \in \text{Mor}(f)$ ولنفرض أن u هو مورفيزم

$$\text{حيث } u: B \rightarrow D, \quad u: A \rightarrow B$$

عندئذ فإن التطبيق α متباين « α هو مورفيزم في الهندسة»

وليكون u متباين يجب أن نبرهن أن α متباين ..

ليكن $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(X, A)$ حيث $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$
 وعندها حسب تعريف α : $u \cdot f_1 = u \cdot f_2$



تركيبة α ممكن ..

$$\alpha \cdot (u \cdot f_1) = \alpha \cdot (u \cdot f_2)$$

$$(\alpha \cdot u) \cdot f_1 = (\alpha \cdot u) \cdot f_2 \quad (\text{تجميعية})$$

$$\alpha \cdot (f_1) = \alpha \cdot (f_2) \quad \text{وعندها حسب تعريف } \alpha \text{ يجب ..}$$

دبيان α متباين يجب أن $f_1 = f_2$ وبالتالي α متباين

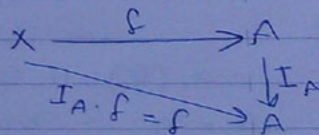
أي أن المورفيزم u هو مورفيزم ..

③ ليكن $I_A: A \rightarrow A$ و $A \in \text{ob}(f)$

وليكون $X \in \text{ob}(f)$ ولتلقا التطبيق

$$\alpha: \mathcal{F}(X, A) \rightarrow \mathcal{F}(X, A)$$

$$\forall f \in \mathcal{F}(X, A) : \alpha(f) = I_A \cdot f = f$$



«لأن التطبيق لا يلعب دور العناصر الخالية»

ولنتثبت أن α متباين :

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(X, A) : \alpha(f_1) = \alpha(f_2)$$

$$\text{عندها حسب تعريف } \alpha : f_1 = f_2 \quad \text{وبالتالي } \alpha \text{ متباين ..}$$

وعنده I_A هو مورفيزم ..

مناظرة الامور من مميزات

تفسيرية

لكن f فتعني عندنا

- ① تركيبة الامور من مميزات هو الامور من مميزات
- ② اعداد u و v من مميزات f حيث u, v الامور من مميزات فان u, v الامور من مميزات
- ③ الموضع الظاهر الامور من مميزات

البيانات

④ لقراء $v: B \rightarrow D$ و $u: A \rightarrow B$

حيث $A, B, D \in \text{ob}(f)$ فان التطبيقات

من اجل u $\beta_1: f(B, x) \rightarrow f(A, x)$

$\beta_1(u) = f \cdot u$

من اجل v $\beta_2: f(D, x) \rightarrow f(B, x)$

$\beta_2(v) = g \cdot v$

لذا $u: A \rightarrow D$ عندنا

من اجل u, v $\beta: f(D, x) \rightarrow f(A, x)$

$\beta_0(u) = M \cdot (v \cdot u)$

① لقراء ان كلا من u, v الامور من مميزات

عندنا كلا من β_1, β_2 متباينين ، وليرى ان β_0 متباين

$\beta_0(M_1) = \beta_0(M_2)$

لكن $M_1, M_2 \in f(D, x)$ حيث

$M_1 \cdot (v \cdot u) = M_2 \cdot (v \cdot u)$

عندنا حسب ترتيب β_0

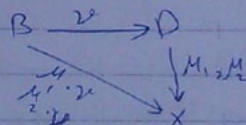
$(M_1 \cdot v) \cdot u = (M_2 \cdot v) \cdot u$

دسب الخاصية التجميعية

وبان $M_1 \cdot v, M_2 \cdot v \in f(B, x)$

$\beta_1(M_1 \cdot v) = (M_1 \cdot v) \cdot u$ حيث ان:

$\beta_2(M_2 \cdot v) = (M_2 \cdot v) \cdot u$ متساويين



$\beta_1(M_1 \cdot v) = \beta_2(M_2 \cdot v) \Rightarrow M_1 \cdot v = M_2 \cdot v$

و β_0 متباين

$M, M' \in f(D, X)$...

β ... $f(D, X)$...

$\beta(M) = M \cdot 2^u$
 $\beta(M') = M' \cdot 2^u$... متساويين

$\Rightarrow \beta(M) = \beta(M')$
 $M = M'$

ولذلك β صيغتين جيدتين

... β ... 2^u ...

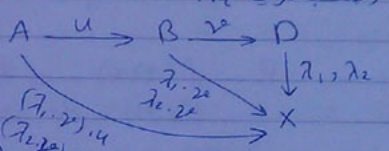
② ... u ... β ...

... β ...

$\beta(\lambda_1) = \beta(\lambda_2)$... $\lambda_1, \lambda_2 \in f(D, X)$...

$\lambda_1 \cdot 2^u = \lambda_2 \cdot 2^u$

... تعريف β :



... u ...

$(\lambda_1 \cdot 2^u) \cdot u = (\lambda_2 \cdot 2^u) \cdot u$

$\lambda_1 \cdot (2^u \cdot u) = \lambda_2 \cdot (2^u \cdot u)$ (بالتساوي)

... $\beta(\lambda_1) = \beta(\lambda_2)$... $\lambda_1 = \lambda_2$...

... β ...

③ ...

$I_B : B \rightarrow B$... $B \in \text{ob}(f)$...

$f : f(B, X) \rightarrow f(B, X)$... $X \in \text{ob}(f)$...

$\forall f \in f(B, X) \quad \beta(f) = f \cdot I_B = f$

$B \xrightarrow{f} X$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in f(B, X)$... β ...

$I_B \uparrow$

$B \xrightarrow{f \cdot I_B} X$

$\beta(\lambda_1) = \beta(\lambda_2)$...

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$...

... I_B ...