المحاضرة الثانية

16/3/2014

المونومورفيزم - الابيمورفيزم - الايزومورفيزم ..

تعريف: ليكن $\mathcal{L}$ فئة ، وليكن $u \in \mathcal{L}(A,B)$ حيث $A,B \in ob(\mathcal{L})$

وليكن $X \in ob(\mathcal{L})$ .. ولنأخذ التطبيق:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "u.f"'] & A \arrow[d, "u"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$$\alpha : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$$

المعرف بالشكل: $\forall f \in \mathcal{L}(X,A) \; , \; \alpha(f) = u.f$

ولنأخذ التطبيق:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g.u"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$\beta : \mathcal{L}(B,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$$

المعرف بالشكل: $\forall g \in \mathcal{L}(B,X) \; , \; \beta(g) = g.u$

« هذان التطبيقان موجودان دوماً من أجل أي مورفيزم u وأي شيء X »

* نقول عن المورفيزم u إنه مونومورفيزم .. إذا كان التطبيق α متباين
* ونقول عن المورفيزم u إنه ابيمورفيزم .. إذا كان التطبيق β متباين

مبرهنة: ليكن $\mathcal{L}$ فئة .. عندئذ:

① تركيب مونومورفيزمين هو مونومورفيزم

② إذا كان $u,v \in Mor(\mathcal{L})$: u,v وكان $\boxed{v.u}$ مونومورفيزم

عندئذ فإن $\boxed{u}$ مونومورفيزم

③ لأجل $\forall A \in ob(\mathcal{L})$ ، المورفيزم المطابق $I_A : A \to A$ هو مونومورفيزم

البرهان:

① ليكن $u \in \mathcal{L}(A,B) , v \in \mathcal{L}(B,D)$ مونومورفيزمين

عندئذ

$$v.u \in \mathcal{L}(A,D)$$

وبما أن كلاً من v و u مونومورفيزمين فإنه لأجل أي $X \in ob(\mathcal{L})$

التطبيقات التالية متباينة:

«من أجل u» $\alpha_1 : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$

$$\alpha_1(f) = u \cdot f$$

«من أجل v» $\alpha_2 : \mathcal{L}(X,B) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$

$$\alpha_2(g) = v \cdot g$$

«من أجل v.u» $\alpha_0 : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$

$$\alpha_0(\varphi) = (v \cdot u) \cdot \varphi$$

ولنبرهن على أن التطبيق ، متباين ..

ليكن $\varphi_1 , \varphi_2 \in \mathcal{L}(X,A)$ بحيث $\alpha_0(\varphi_1) = \alpha_0(\varphi_2)$

وبحسب تعريف α_0 : $(v \cdot u) \cdot \varphi_1 = (v \cdot u) \cdot \varphi_2$

وحسب الخاصة التجميعية:

$$(*) \quad v \cdot (u \cdot \varphi_1) = v \cdot (u \cdot \varphi_2)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_1 , \varphi_2"] \arrow[dr, "u \cdot \varphi_1"', "u \cdot \varphi_2"'] & A \arrow[d, "u"] \\ & B \end{tikzcd}$$

لدينا $(u \cdot \varphi_1) , (u \cdot \varphi_2) \in \mathcal{L}(X,B)$ «و $\mathcal{L}(X,B)$ هي منطلق α_2 اذاً يمكننا أخذ الصور المباشرة لهذين العنصرين وفق α_2 »

أي بما أن $u \cdot \varphi_1 , u \cdot \varphi_2 \in \mathcal{L}(X,B)$ فإن:

$$\alpha_2(u \cdot \varphi_1) = v \cdot (u \cdot \varphi_1)$$
$$\alpha_2(u \cdot \varphi_2) = v \cdot (u \cdot \varphi_2)$$

متساويان حسب $(*)$

$$\Rightarrow \alpha_2(u \cdot \varphi_1) = \alpha_2(u \cdot \varphi_2)$$

وبما أن α_2 متباين فإن: $u \cdot \varphi_1 = u \cdot \varphi_2$

من جهة أخرى: بما أن $\varphi_1 , \varphi_2 \in \mathcal{L}(X,A)$ فإن:

$$\alpha_1(\varphi_1) = u \cdot \varphi_1 = \alpha_1(\varphi_2) = u \cdot \varphi_2$$

لأن $(u \cdot \varphi_1 = u \cdot \varphi_2)$ ولكون α_1 متباين فإن $\varphi_1 = \varphi_2$

وهذا يبين أن التطبيق α_0 متباين وبالتالي المورفيزم $v \cdot u$ هو مونومورفيزم

② ليكن $v, u \in Mor(\mathcal{L})$ ولنفرض أن $v.u$ مونومورفيزم
حيث : $u : A \to B$ ، $v : B \to D$
عندئذٍ فإن التطبيق α_0 متباين «α_0 كما هو معرف في البند السابق»
وليكون u متباين يجب أن نبرهن أن α_1 متباين ..
ليكن $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X, A)$ بحيث $\alpha_1(f_1) = \alpha_2(f_2)$
ومنه حسب تعريف α_1 : $u.f_1 = u.f_2$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u.f_1"] \arrow[dr, "v.(u.f_1)"'] & B \arrow[d, "v"] \\ & D \end{tikzcd}$$

⇐ تركيب v ممكن ..
ومنه نجد أن : $v.(u.f_1) = v.(u.f_2)$
(تجميعية) $(v.u).f_1 = (v.u).f_2$
وحسب تعريف α_0 نجد ، $\alpha_0(f_1) = \alpha_0(f_2)$
وبما أن α_0 متباين نجد أن $f_1 = f_2$ وبالتالي α_1 متباين
أي أن المورفيزم u مونومورفيزم ..

③ ليكن $A \in ob(\mathcal{L})$ و $I_A : A \to A$
وليكن $X \in ob(\mathcal{L})$ ولناخذ التطبيق
$\alpha : \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, A)$
$\forall f \in \mathcal{L}(X, A) \quad : \quad \alpha(f) = I_A . f = f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "I_A . f = f"'] & A \arrow[d, "I_A"] \\ & A \end{tikzcd}$$

«لأن التطبيق المطابق يلعب دور العنصر المحايد»
ولنثبت أن α متباين :
$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X, A) \quad : \quad \alpha(f_1) = \alpha(f_2)$
نعوض حسب α : $f_1 = f_2$ وبالتالي α متباين ..
ومنه I_A مونومورفيزم ..

تمهيدية | متتابعة لاجل الايزومورفيزمات

لتكن $\mathcal{L}$ فئة عندئذ:

① تركيب ايزومورفيزمين هو ايزومورفيزم.

② اذا كان v و u مورفيزمين من الفئة $\mathcal{L}$ حيث $v.u$ ايزومورفيزم فان v ايزومورفيزم

③ المورفيزم المطابق ايزومورفيزم.

الاثبات:

* لنفرض ان $u:A\to B$ ، $v:B\to D$

حيث $A,B,D\in ob(\mathcal{L})$ .. لنأخذ التطبيقات:

$\beta_1:\mathcal{L}(B,X)\longrightarrow\mathcal{L}(A,X)$ «من اجل u»

$\beta_1(f)=f.u$

$\beta_2:\mathcal{L}(D,X)\longrightarrow\mathcal{L}(B,X)$ «من اجل v»

$\beta_2(g)=g.v$

لدينا $v.u:A\longrightarrow D$ عندئذ:

$\beta_0:\mathcal{L}(D,X)\longrightarrow\mathcal{L}(A,X)$ «من اجل v.u»

$\beta_0(\mu)=\mu.(v.u)$

① لنفرض ان كلاً من v و u ايزومورفيزم..

عندئذ كلاً من β_1 ، β_2 متباين ، ولنبرهن ان β_0 متباين..

ليكن $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{L}(D,X)$ حيث $\beta_0(\mu_1)=\beta_0(\mu_2)$

عندئذ حسب تعريف β_0 : $\mu_1.(v.u)=\mu_2.(v.u)$

وحسب الخاصة التجميعية: $(\mu_1.v).u=(\mu_2.v).u$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "{\mu_1.v,\ \mu_2.v}"'] & D \arrow[d, "{\mu_1,\mu_2}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

وبما ان $\mu_1.v,\ \mu_2.v\in\mathcal{L}(B,X)$

نجد ان:

$\beta_1(\mu_1.v)=(\mu_1.v).u$

$\beta_2(\mu_2.v)=(\mu_2.v).u$

متساويين

$$\beta_1(\mu_1.v)=\beta_2(\mu_2.v)\Rightarrow \mu_1.v=\mu_2.v$$

لان β_1 متباين.

ومن هذا نجد $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}(D, X)$

$\mathcal{L}(D,X)$ منطلق β_1 ويمكننا أن نحصر المباشرة (بالعكس) β_2 «

$\beta_2(\mu_1) = \mu_1 . \nu$

$\beta_2(\mu_2) = \mu_2 . \nu$ متساويين

$\Rightarrow \beta_2(\mu_1) = \beta_2(\mu_2)$

$\mu_1 = \mu_2$

ولكون β_2 متباين نجد أن

ومنه فإن β_0 متباين وبالتالي المورفيزم $\nu . u$ ابيمورفيزم ..

② لنفرض أن الجداء $\nu . u$ ابيمورفيزم .. عندئذ β_0 متباين

ولنبرهن أن β_2 متباين .. « β_2 التطبيق المتعلق بـ ν »

ليكن $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{L}(D, X)$ بحيث $\beta_2(\lambda_1) = \beta_2(\lambda_2)$

وحسب تعريف β_2: $\lambda_1 . \nu = \lambda_2 . \nu$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[rrd, bend right, "(\lambda_1 . \nu) . u"', "(\lambda_2 . \nu) . u"] & B \arrow[r, "\nu"] \arrow[rd, "\lambda_1 . \nu"', "\lambda_2 . \nu"] & D \arrow[d, "\lambda_1 , \lambda_2"] \\
 & & X
\end{tikzcd}
$$

وبالتالي يمكن تركيب u :

$(\lambda_1 . \nu) . u = (\lambda_2 . \nu) . u$

$\lambda_1 . (\nu . u) = \lambda_2 . (\nu . u)$ (تجميعية)

وهنا نبين أن $\beta_0(\lambda_1) = \beta_0(\lambda_2)$ ولكون β_0 متباين نجد أن $\lambda_1 = \lambda_2$

وبالتالي β_2 متباين .. أي أن التطبيق ν ابيمورفيزم ..

③ بطريقة مشابهة لـ ③ في المبرهنة السابقة ..

ليكن $B \in ob(\mathcal{L})$ و $I_B : B \to B$

وليكن $X \in ob(\mathcal{L})$ ولنأخذ التطبيق: $\beta : \mathcal{L}(B, X) \to \mathcal{L}(B, X)$

$\forall f \in \mathcal{L}(B, X) \quad \beta(f) = f . I_B = f$

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] & X \\
B \arrow[u, "I_B"] \arrow[ru, "f . I_B = f"'] &
\end{tikzcd}
$$

لنثبت أن β متباين: $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(B, X)$

بحيث $\beta(f_1) = \beta(f_2)$

$\Rightarrow f_1 = f_2$ حسب تعريف β

وبالتالي β متباين ومنه I_B ايبومورفيزم

انتهت المحاضرة