المحاضرة التاسعة

المجموعة الكثيفة في الفضاء التبولوجي

تعريف: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A \subset X$:
نقول إن A كثيفة في X (بالنسبة للتبولوجيا τ) إذا كانت
$\overline{A} = X$ أي أن X هي أصغر مغلقة تحوي A

مثال ①

$X = \{a,b,c,d\}$ ، $\tau = \{\phi, X, \{b\}, \{b,c\}\}$

المجموعات المغلقة في (X,τ) هي:

$X , \phi , \{a,c,d\} , \{a,d\}$

$\overline{\{a\}} = \{a,d\} \neq X \Rightarrow$ $\{a\}$ غير كثيفة في (X,τ)

$\overline{\{b,d\}} = X \Rightarrow$ $\{b,d\}$ كثيفة في (X,τ)

مثال ②

لنزود $\mathbb{R}$ بالتبولوجيا المألوفة،

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$

$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \cup \phi = \mathbb{Z} \neq \mathbb{R} \Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ غير كثيفة في $\mathbb{R}$

ملاحظات: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ، $A \subset X$ ، $x \in A$

$x \in A' \Leftrightarrow (\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow B \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$

$x \in \overline{A} = A \cup A' \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in A')$

$\Leftrightarrow (x \in A) \vee (\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow B \cap A \setminus \{x\} \neq \phi)$

$\Leftrightarrow (\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow A \cap B \neq \phi)$

$(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow$ كل مفتوحة تحوي x يتقاطع مع A

مبرهنة ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ، $A\subset X$ عندئذٍ

① $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ ② $(A^\circ)^c = \overline{(A^c)}$

لنبرهن -1- ونبقي -2- تمرين

$$\bar{A} = A\cup A' \Longrightarrow (\bar{A})^c = (A\cup A')^c = A^c \cap (A')^c$$

$$x\in(\bar{A})^c \Longleftrightarrow (x\in A^c)\wedge(x\in(A')^c)$$

$$\Longleftrightarrow (x\notin A)\wedge(x\notin A')$$

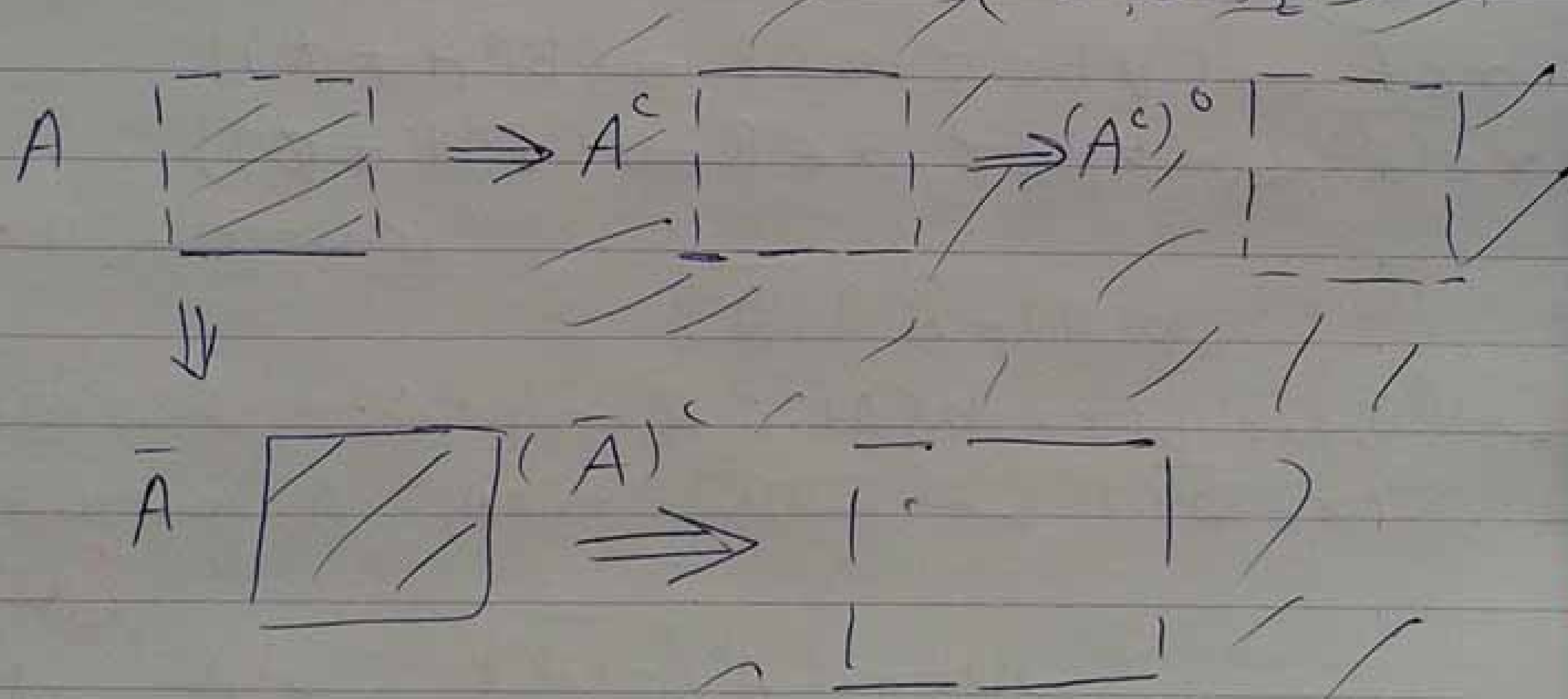
$$\Longleftrightarrow (x\notin A)\wedge(\exists B\in\tau: x\in B\wedge B\cap A\setminus\{x\}=\emptyset)$$

$$\Longleftrightarrow (x\notin A)\wedge(\exists B\in\tau: x\in B\wedge B\subset A^c)$$

$$\Longleftrightarrow (\exists B\in\tau; x\in B\ \ B\subset A^c)$$

$$\Longleftrightarrow x\in(A^c)^\circ \qquad \#$$

توضيح ذلك بالرسم



تعريف خارج مجموعة ليكن (X, τ) فضاء توبولوجي ، $X \supset A$

سنعرف خارج المجموعة A بأنه

$$ext(A) = (A^c)^\circ = (\bar{A})^c$$

وهي مجموعة خلاصة A وتساوي داخل متممة A

محيط مجموعة تعريف النقطة المحيطة لمجموعة

ليكن (X, τ) فضاء توبولوجي ، $x \in X$ ، $X \supset A$

نقول عن x إنها نقطة محيطة للمجموعة A إذا كانت كل مجموعة مفتوحة

تحوي x ستتقاطع مع A ومع A^c أي أن :

x محيطة $\iff (\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow (B \cap A \neq \phi \cap B \cap A^c \neq \phi)$

سنرمز $b(A)$ لمجموعة كل النقاط المحيطة لـ A

تذكرة

$$x \in \bar{A} \iff (\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow (B \cap A \neq \phi))$$

$$x \in \overline{(A^c)} \iff (\forall B \in \tau ; x \in B \Rightarrow (B \cap A^c \neq \phi))$$

مما يثبت صحة ما يلي :

$$b(A) = \bar{A} \cap \overline{(A^c)}$$

أي أنه تكون النقطة محيطة لـ A ($x \in b(A)$) إذا وفقط إذا كانت

x ملاصقة لـ A ($x \in \bar{A}$) و ملاصقة لمتممتها ($x \in \overline{(A^c)}$)

نتائج :

1- نعلم أن $(A^\circ)^c = \overline{(A^c)}$ وبالتالي :

$$b(A) = \bar{A} \cap (A^\circ)^c$$

$$X \setminus b(A) = (b(A))^c = (\bar{A} \cap (A^\circ)^c)^c$$

$$(b(A))^c = (\bar{A})^c \cup A^\circ = (A^c)^\circ \cup A^\circ$$

أي أنه تكون x غير محيطية لـ A إذا وفقط إذا كانت $(x \in A^\circ)$ أو

$x \in ext(A) = (A^c)^\circ$

2- $b(A)$ مجموعة مغلقة لأن

($b(A)$ تقاطع مغلقين) : $b(A) = \bar{A} \cap \overline{(A^c)}$

3- $b(A) \subset \bar{A}$

4- $\bar{A} = A^\circ \dot{\cup} b(A)$ $\dot{\cup}$: اجتماع منفصل أي أن التقاطع يكون خالي

الإثبات

$$A^\circ \subset A \subset \bar{A}$$

$$b(A) = \bar{A} \cap \overline{(A^c)} \Rightarrow b(A) \subset \bar{A}$$

$$A^\circ \cup b(A) \subset \bar{A} \quad \ldots (1)$$

$$x \in \bar{A} \Rightarrow (\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow B \cap A \neq \phi)$$

عندئذ فإن واحدة فقط من القضيتين التاليتين صحيحة:

① $x \in A^\circ \Rightarrow x \in A^\circ \cup b(A)$ ويتم المطلوب

② $x \notin A^\circ \Rightarrow (\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow B \not\subset A)$

$\Rightarrow (\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow B \cap A^c \neq \phi)$

لكن $B \cap A \neq \phi$ لأن $x \in \bar{A}$ ، بالتالي

$$x \in b(A) \subset b(A) \cup A^\circ$$

$$x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A^\circ \cup b(A)$$

مما يثبت أن $\bar{A} \subset A^\circ \cup b(A) \quad \ldots (2)$

من (1) و (2) يكون $\bar{A} = A^\circ \cup b(A)$

نثبت أن الاجتماع السابق منفصل أي أن

$A^\circ \cap b(A) = \phi$

لنبرهن أن $[x \in A^\circ \Rightarrow x \notin b(A)]$ فيتم المطلوب

$x \in A^\circ \Rightarrow (\exists B \in \tau : x \in B \Rightarrow B \subset A)$

$\Rightarrow (\exists B \in \tau : x \in B \wedge B \cap A^c = \phi)$

$\Rightarrow x \notin b(A)$

ومنه $\phi = A^\circ \cap b(A)$ وبالتالي $\bar{A} = A^\circ \cup b(A)$

5. $b(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$ " تنتج من 4 "

تمرين لتكن $X = \{a, b, c, d\}$ ولتكن التبولوجيا

$\tau = \{\phi, X, \{b, c\}, \{a, d\}\}$

أوجد $b(\{a, d\})$

$b(\{a, d\}) = \overline{\{a, d\}} \setminus \{a, d\}^\circ$

$= X \setminus \phi = X$

انتهت المحاضرة التاسعة