/ /

المحاضرة التاسعة:

مبرهنة:

إذا كان تحويل لابلاس متقارب بالإطلاق من أجل $S=S_0$:

فهو متقارب بالإطلاق من أجل $S>S_0$.

* مسائل الشروط للمعادلات التفاضلية باستخدام تحويل لابلاس:

- لا يمكن استخدام تحويلات لابلاس في حل المعادلات التفاضلية إلا إذا كانت مقرونة بشروط ابتدائية:
- لاستخدام تحويل لابلاس نتبع مايلي:

1). نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية.
2). نحصل على معادلة (علاقة جبرية) لتحويل لابلاس ثم نحل هذه المعادلة بالنسبة لـ $Y(s)$.
3). نأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي المعادلة فنحصل على حل المعادلة التفاضلية العادية.

مثال: استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية: $y''-2y'+y=4$

المقرونة بشروط البدء التالية: $y(0)=4,\ y'(0)=2$

الحل:

$$L[y''-2y'+y]=L[4]$$

$$L[y'']-2L[y']+L[y]=4.L[1]$$

$$s^2.Y(s)-s.y(0)-y'(0)-2(s.Y(s)-y(0))+Y(s)=\frac{4}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s)(s^2-2s+1)-4.s+6=\frac{4}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s).(s-1)^2=\frac{4}{s}+4s-6$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{4s^2 - 6s + 4}{s(s-1)^2} = \frac{4(s^2-2s+1)+2s}{s(s-1)^2}$$

«وكما يمكن إيجادها بتفريق الكسور»

$$Y(s) = \frac{4}{s} + \frac{2}{(s-1)^2}$$

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t) = L^{-1}\left[\frac{4}{s} + \frac{2}{(s-1)^2}\right]$$

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t) = L^{-1}\left[\frac{4}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2}\right]$$

إن: $L^{-1}\left[\frac{4}{s}\right] = 4$

وكذلك فإن: $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$ ومنه: $t.e^t = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]$

وبالتالي:

$$y(t) = 4 + 2.t.e^t$$

مثال (2): أوجد حل المعادلة التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$y'' + y = e^t$$

$$y'(0) = 2 \quad , \quad y(0) = 0$$

الحل:

$$L[y'' + y] = L[e^t]$$

$$L[y''] + L[y] = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow s^2.Y(s) - s.y(s) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow Y(s)(s^2+1) - 2 = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow 2s-1 = As^2+A+Bs^2-Bs+Cs-C$$

$$2s-1 = (A+B)s^2+(-B+C)s-C+A$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ -B+C=2 \\ A-C=-1 \end{array}\right\} A=-B \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{-1}{2}, C=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}[Y(s)] = y(t) = A\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + B\cdot L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + C L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t$$

مثال (3):

$$y'' - 5y' + 6y = 1$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad , t>0$$

الحل:

$$L[y''] - 5L[y'] + 6\cdot L[y] = L[1]$$

$$s^2\cdot Y(s) - s\cdot y(0) - y'(0) - 5(s\cdot Y(s) - y(0)) + 6\cdot Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s)(s^2-5s+6) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2}$$

$$(A+B+C)s^2+(-5A-2B-3C)s+6A=1$$

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=0\\ -5A-2B-3C&=0\\ 6A&=1 \end{aligned}\right| \quad A=\frac{1}{6},\ B=\frac{1}{3},\ C=-\frac{1}{2}$$

$$L^{-1}[Y(s)] = A\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+B\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]+C\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{2t}$$

وظيفة:

(1). $y''+2y'+y=e^{-2t}$; $t>0$, $y(0)=y'(0)=0$.

(2). $y''-9y=t$; $t>0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-3$

(3). $y''+y'=t\cdot e^{t}$; $t>0$, $y(0)=y'(0)=0$

حل مسائل الشروط للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس:

مثال:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=x \qquad x>0\ ,\ t>0$$

$$z(x,0)=z(0,t)=0$$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$L\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right]+x\cdot L\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right]=x\cdot L[1]$$

$$s(Z(x,s))-z(x,0)+x\cdot Z'(x,s)=\frac{x}{s}$$

$$S\cdot Z(x,S)+x\cdot Z'(x,S)=\frac{x}{S}$$

$$Z'+\frac{S}{x}\cdot Z=\frac{1}{S}$$

المعادلة من الشكل : $\boxed{y'+Py=q}$ وبالتالي تقبل حلاً من الشكل :

$$Z(x,S)=e^{-\int p\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p\,dx}\cdot q\cdot dx+C\right]$$

$$=e^{-\int \frac{S}{x}\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int\frac{S}{x}\cdot d}\cdot\frac{1}{S}\cdot dx+C\right]$$

$$=e^{-S\cdot\ln x}\cdot\left[\int e^{S\ln x}\cdot\frac{1}{S}\cdot dx+C\right]$$

$$=e^{\ln x^{-S}}\cdot\left[\int e^{\ln x^{S}}\cdot\frac{1}{S}\cdot dx+C\right]$$

$$=x^{-S}\cdot\int\frac{x^{S}}{S}\cdot dx+C$$

$$=x^{-S}\left[\frac{x^{S+1}}{S(S+1)}+C\right]$$

$$\Rightarrow Z(x,S)=\frac{x}{S(S+1)}+\frac{C}{x^{S}}$$

ومن شروط البدء :

$$Z(0,s)=\int_0^{\infty}\underbrace{z(0,t)}_{0}\cdot e^{-S\cdot t}\cdot dt=0$$

$$Z(x,S)=\frac{x^{S+1}+C(S(S+1))}{S(S+1)\cdot x^{S}}$$

$$\Rightarrow S(S+1)\cdot x^{S}\cdot Z(x,S)=x^{S+1}+S(S+1)\cdot C$$

نعوض: $Z(0,S)=0$ فنجد:

$$S(S+1)\cdot 0\cdot Z(0,S)=0+S(S+1)\cdot C$$

$$\Rightarrow S(S+1)\cdot C=0 \Rightarrow C=0$$

$$Z(x,S)=\frac{x}{S(S+1)}$$

$$L^{-1}[Z(x,S)]=x\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{S(S+1)}\right]=x\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{S}-\frac{1}{S+1}\right]$$

$$L^{-1}[Z(x,S)]=x[1-e^{-t}]$$

$$z(x,t)=x-x\cdot e^{-t}$$

- انتهت المحاضرة التاسعة -