الثلاثاء ١٥/٤/٢٠١٤م

((م 12))

**تمرين 1:**

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

"برهن أن الدالة f مستمرة على كل مستقيم مار من مبدأ الإحداثيات دون أن تكون مستمرة في هذه النقطة"

**الحل:**

نفرض $y = \alpha x$

$$f(x,y) = \frac{\alpha^2 x^3}{x^2 + \alpha^4 x^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha^2 x^3}{x^2+\alpha^4 x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha^2 x}{1+x^2 \alpha^4} = 0 = f(0,0).$$

نفرض أن $y^2 = x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

الدالة غير مستمرة.

---

**تمرين 2 -**

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2} \sin(x-y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

أثبت أن:

$f_x(0,0) = 0$ , $f_y(0,0) = 0$

$f_{xx}(0,0) = 0$ , $f_{yy}(0,0) = 0$

$f_{xy}(0,0) = 1$ , $f_{yx}(0,0) = 1$

$x^2+y^2$

---

$$f_x(x,y) = \frac{\left((2xy+y^2)\sin(x-y)+(x^2y+xy^2)(\cos(x-y))\right)(x^2+y^2) - 2x(x^2y+xy^2)\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(2x^3y+x^2y^2)\sin(x-y)+(x^4y+x^3y^2)\cos(x-y)+(2xy^3+y^4)\sin(x-y) + (x^2y^3+xy^4)\cos(x-y)+(-2x^3y-2x^2y^2)(\sin(x-y))}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(\cancel{2x^3y}+x^2y^2+2xy^3+y^4-\cancel{2x^3y}-2x^2y^2)\sin(x-y) + (x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4)\cos(x-y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(2xy^3+y^4-x^2y^2)\sin(x-y)+(x^4y+y^2x^3+y^3x^2+y^4x)\cos(X-y)}{(x^2+y^2)^2}$$

بالنسبة لـ $f_y$: نطبق نفس خطوات الاشتقاق السابقة فنحصل على:

$$f_y(x,y) = \frac{(2yx^3+x^4-x^2y^2)\sin(x-y)-(xy^4+y^3x^2+x^2y^2+yx^4)(\cos(x-y))}{(x^2+y^2)^2}$$

نعتبر الـ x غير موجودة

$-(-\sin(x-$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{df}{dy}(0,0) = f_y(0,0) = \lim_{K\to 0}\frac{f(0,K)-f(0,0)}{K}$$

$$= \lim_{K\to 0}\frac{0-0}{K} = 0.$$

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{h^4} - 0}{h} = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = \lim_{K \to 0} \frac{f_y(0,K) - f_y(0,0)}{K} = \lim_{K \to 0} \frac{0}{K} = 0$$

$$\frac{d}{dy} f_x(0,0) = \lim_{K \to 0} \frac{f_x(0,K) - f_x(0,0)}{K} = \lim_{K \to 0} \frac{K^4 \frac{\sin(-K)}{K^4}}{K}$$

$$= \lim_{K \to 0} \frac{\sin(-K)}{K} = -1$$

$$\frac{d}{dx} f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^4 \sin(h)}{h^5} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

---

* تمرين (3) :

$$f : R^2 \longrightarrow R$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^6 + 2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

بيّن أنه يوجد للدالة f مشتقة في النقطة (0,0) في أي اتجاه كان في حين أن f ليست مستمرة في هذه النقطة.

مشتقة اتجاهية
$R^2$ في $u = (\alpha, \beta)$

الحل:

لتكن $u = (\alpha, \beta) \in R^2$ بحيث $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ :

أي: $\|u\| = 1$

$$\frac{df}{du}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + hu) - f(c)}{h}$$

$c(0,0)$

$$c + hu = (0,0) + h(\alpha, \beta) = (h\alpha, h\beta).$$

$$\frac{df}{du}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3 \alpha^2 \beta}{h^6 \alpha^6 + 2h^2 \beta^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \alpha^2 \beta}{h(h^4 \alpha^6 + 2\beta^2)}$$

/ /

$= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha^2\beta}{(h^4\alpha^6+2\beta^2)} = \frac{\alpha^2\beta}{2\beta^2} = \frac{\alpha^2}{2\beta}$ هذا ; $(\beta\neq 0)$

أما من أجل $(\beta=0)$ :

$$\frac{df}{du}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha^2\beta}{h^4\alpha^6+2\beta^2} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^4\alpha^6} = 0.$$

* الطلب الثاني أن f غير مستمر في النقطة $(0,0)$

نأخذ أي متتالية تسعى نحو الصفر

نأخذ متتالية $\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right\} \longrightarrow (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^6}+2\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n^2}+2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

بين أن الـ f تختلف عن الصفر.

إذن f غير مستمر في النقطة $(0,0)$.

$\boxed{ط}$ بين رياضياً أن f غير مستمر حسب التعريف.

باختيار أي إبسلون ينقض الشرط $|\varepsilon|>\delta$

$f$ مستمر $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0 ; \exists \delta>0 : \|(x,y)-(0,0)\|<\delta$
$\Longrightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\delta.$

$f$ غير مستمر $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0 ; \exists \delta>0 ; \|(x,y)-(0,0)\|<\delta$
$\Longrightarrow |f(x,y)-f(0)|>\delta$

نأخذ $\boxed{x=\frac{\delta}{\sqrt{2}}}$ , $\boxed{y=\frac{\delta}{2}}$

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^2}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{3\delta^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta < \delta.$$

$$* \ |f(x,y)-f(0,0)| = \frac{\frac{\delta^2}{2}\cdot\frac{\delta}{2}}{\left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)^6+2\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\delta^3}{\cancel{4}\,2}}{\frac{\cancel{\delta^6}\,\delta^4}{\cancel{8}\,4}+\cancel{2}\frac{\cancel{\delta^2}\,\delta}{\cancel{2}\,1}}$$

$$= \frac{\delta}{2\left(\frac{\delta^4}{4}+1\right)} = \frac{\delta}{\frac{\delta^4}{2}+2} = \frac{2\delta}{\delta^4+4}$$

كغير صفر آخذ

$$\forall \varepsilon>0 , \exists \varepsilon = \frac{\delta>0}{\delta^4+4>0} > 0 , \|x,y\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|>\delta.$$

f غير مستمر عند $(0,0)$