المحاضرة الخامسة عشرة — الإثنين 5/5/2014

الاستقراء الرياضي والعلاقات العودية

أولاً: الاستقراء الرياضي:

مبرهنة: (مبدأ الاستقراء الرياضي):

إذا كانت $p(n)$ قضية تتعلق بالعدد $n \in \mathbb{N}$ ولنفرض أنّ:

1- القضية $p(n_0)$ صحيحة حيث $n_0 \in \mathbb{N}$.

2- من أجل كل $n_0 \leq n$ فإنّ الاقتضاء التالي صحيح:

$$\left(p(n) \text{ صحيحة } \rightarrow p(n+1) \text{ صحيحة }\right)$$

عندئذٍ فإنّ القضية $p(n)$ صحيحة من أجل كل $n_0 \leq n$.

الإثبات:

لتكن المجموعة: $A = \{ n \in \mathbb{N} : n_0 \leq n \text{ و } p(n) \text{ خاطئة} \}$

ولنبرهن أنّ A خالية فيتم المطلوب.

لنفرض جدلاً أنّ $A \neq \phi$ وبما أنّ $\phi \neq A \subset \mathbb{N}$ فيوجد $A \ni r = \min A$

حيث $r \geq n_0 + 1$ وبالتالي $p(r)$ خاطئة، لكن $A \not\ni r-1 \geq n_0$

$\Leftarrow$ $p(r-1)$ صحيحة وبالتالي حسب الفرض (2) من المبرهنة فإنّ

$p(r)$ قضية صحيحة وهذا تناقض وبالتالي الفرض الجدلي

يكون $A \neq \phi$ خاطئ وبالتالي $A = \phi$ ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل

كل $n_0 \leq n$.

تمرين (1): أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أنّ عدد المسارات من $(0,0)$ إلى (m,n) هو:

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$$

حيث $m,n \in \mathbb{N}$

و $m^2 + n^2 \neq 0$ [هذه الكتابة تعني أنّ m و n لا يساويان الصفر بآنٍ واحد]

تذكرة

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

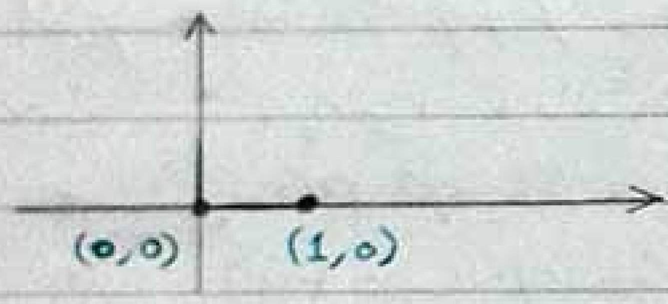
الحل:

- عدد الخطوات الأفقية: m
- عدد الخطوات العمودية: n
- طول المسار = مجموع الخطوات = $m+n$

- لنبرهن بالاستقراء الرياضي على طول المسار $k=m+n$

لنتحقق من أجل الحالة: طول المسار $= k = 1 = m+n = n_0$.

لدينا مسارات:



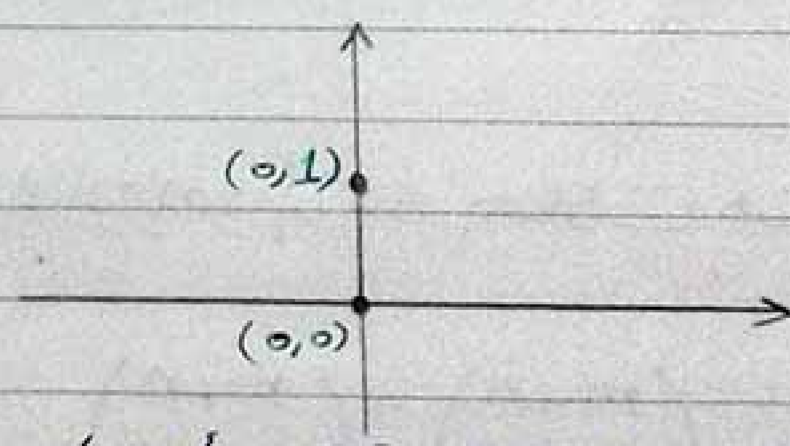
I] عدد المسارات $= 1 =$

$$\binom{1+0}{1} = \binom{m+n}{m} = 1$$

$n=0$ ، $m=1$

II] عدد المسارات من $(0,0)$ إلى $(0,1)$ هو:

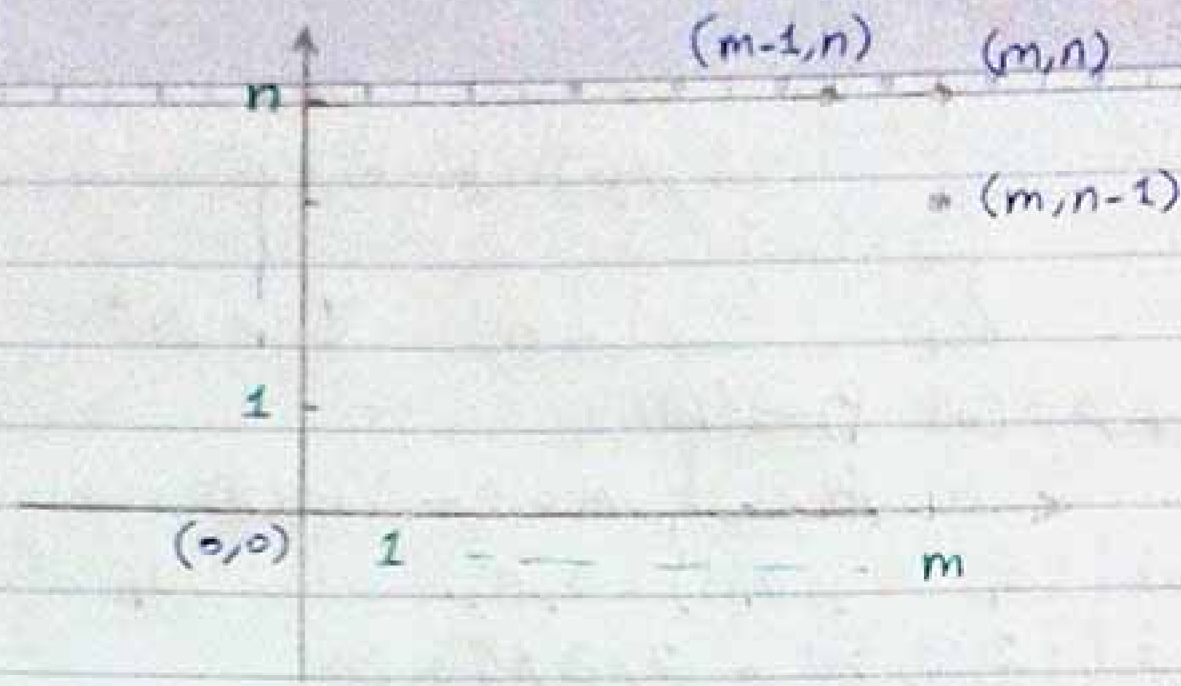
$$1 = \binom{0+1}{1} = \binom{m+n}{n} = 1$$



لنفرض صحة العلاقة من أجل كل مسار طوله $m+n-1 = k-1$

ولنبرهن صحة العلاقة من أجل $m+n=k$

لنتأمل الشكل التالي:



إنّ كل مسار من (0,0) إلى (m,n) سيمر بنقطة واحدة فقط من النقطتين:
(m-1,n) أو (m,n-1) وبالتالي عدد المسارات من (0,0) إلى (m,n)
يساوي عدد المسارات من (0,0) إلى (m-1,n) + عدد المسارات من (0,0) إلى
(m,n-1) =

[حسب الفرض الاستقرائي وكون كل مسار من (0,0) إلى (m-1,n) أو (m,n-1) طوله m+n-1

$$= \binom{m+n-1}{m-1} + \underset{\binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n-1}{m}} = \binom{m+n}{m}$$

عدد الخطوات الأفقية

حسب قاعدة مثلث باسكال:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

ملاحظات خارجية: الشعاع الصفري يوازي أي شعاع.

* إنّ المجموعة وحيدة العنصر {(0,0)} مع الجمع والضرب يشكل فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^2$ يدعى بالفضاء الصفري التافه وبعد هذا الفضاء هو (0) أمّا قاعدته فهي المجموعة الخالية والتي عدد عناصرها (0)

* أي عملية نريد تكرارها عدد خالٍ من المرات يساوي إلى حيادي العملية فعلى سبيل المثال: جداء عناصر المجموعة الخالية والتي عدد عناصرها يساوي إلى الصفر يساوي إلى (1)

هذه الملاحظة الأخيرة هي تفسير لـ

$$\underbrace{a \ldots a . a}_{0\ \text{مرة}} = a^0 = \underset{\text{حيادي الضرب}}{1}$$

تمرين (2): أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أنه:

$$\sum_{\phi \neq A \subset [n]} \frac{1}{\text{Prod}(A)} = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

حيث أولاً: نقصد بـ Prod (A) جداء عناصر المجموعة A

$$\text{Prod}(\{a_1, \ldots, a_n\}) = a_1 . a_2 \ldots\ldots . a_n$$

$$\text{Prod}(\{2,3,5\}) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

ثانياً: الجمع يتم على جميع المجموعات الجزئية من [n] وغير الخالية.

الحل: لنوضح التمرين بمثال قبل حله:

$$\phi \neq A \subset [3] = \{1,2,3\}$$

$$\Updownarrow$$

$$P([3]) \setminus \{\phi\} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$$

$$A \in$$

$$\text{prod}(A) = 1, 2, 3, 2, 6, 3, 6$$

$$\sum_{\phi \neq A \subset [3]} \frac{1}{\text{Prod}(A)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 3 = n$$

عودة إلى الإثبات: لنتحقق من صحة العلاقة من أجل $n_0 = 1$:

$$P([1]) \setminus \{\phi\} = \{1\} \Rightarrow \text{prod}(\{1\}) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{\phi \neq A \subset [1]} \frac{1}{\text{prod}(A)} = \frac{1}{1} = 1 = n_0$$

لنفرض صحة العلاقة من أجل $1 \leq n-1$

ولنبرهن صحتها من أجل n:

$$\sum_{\phi \neq A \subset [n]} \frac{1}{\text{Prod}(A)} = \sum_{\substack{\phi \neq A \subset [n] \\ n \in A}} \frac{1}{\text{Prod}(A)} + \sum_{\substack{\phi \neq A \subset [n] \\ n \notin A}} \frac{1}{\text{prod}(A)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{A\setminus\{n\} \subset [n-1]} \frac{1}{\mathrm{Prod}(A\setminus\{n\})} + \underbrace{\sum_{\phi \neq A \subset [n-1]} \frac{1}{\mathrm{Prod}(A)}}$$

قد تكون خالية عندما $A=[n]$

بالاستفادة من الفرض الاستقرائي $= n-1$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1} + \sum_{\phi \neq \underbrace{A\setminus[n]}_{B} \subset [n-1]} \frac{1}{\mathrm{Prod}(\underbrace{A\setminus[n]}_{B \subset [n-1]})} \right) + n - 1$$

$$= \frac{1}{n} (1 + n - 1) + n - 1 = \frac{1}{n} \times n + n - 1 = n$$

انتهت المحاضرة الخامسة عشرة