المحاضرة العاشرة.   ٢٠١٤ / ٤ / ١٢

المحاضرة العاشرة   مقدمة في التكامل المحدد   ٢٠١٤ / ٤ / ١٢

① : التكامل المحدد:
- أ): تمهيد.
- ب): مجموع ريمان
- ج): تعريف التكامل المحدد.
- د): دالة غير قابلة للمكاملة

② : خواص التكامل المحدد.

③ : التكامل المعتل.

④ : التكامل التابع لوسيط.

⑤ : التكامل العددي.

⑥ : تطبيق التكامل المحدد ((مساحة الأشكال المستوية، السطوح والحجوم، الأطوال)).

تمهيد:

$$a_1+a_2+\dots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$\underbrace{c+c+\dots+c}_{n\text{ مرة}}=nc=\sum_{i=1}^{n}c$$

$$ka_1+ka_2+\dots+ka_n=\sum_{i=1}^{n}ka_i=k\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i+\beta b_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_i+\beta\sum_{i=1}^{n}b_i$$

$$1+2+3+\dots+n=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

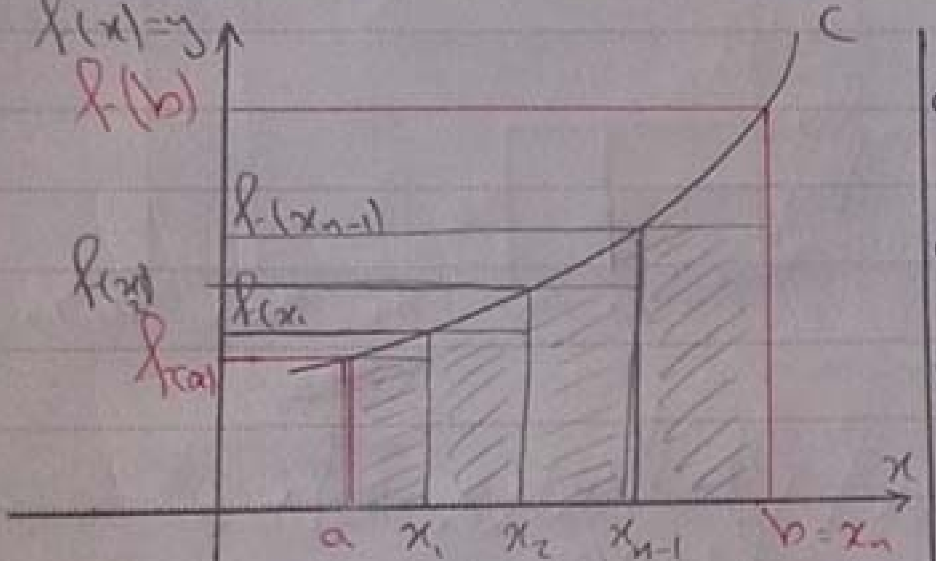
$$1^2+2^2+\dots+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\sum_{i=1}^{n}i^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

مجموع ريمان:

اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$

$f(x)\geq 0$



$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}\quad : 1\leq k\leq n$$

$$\Delta x_1=x_1-x_0$$

$$\Delta x_2=x_2-x_1$$

$$\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$$

نأخذ التجزئة

$$P=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b\}$$

الهدف الحصول على المساحة المحصورة بين المنحني C

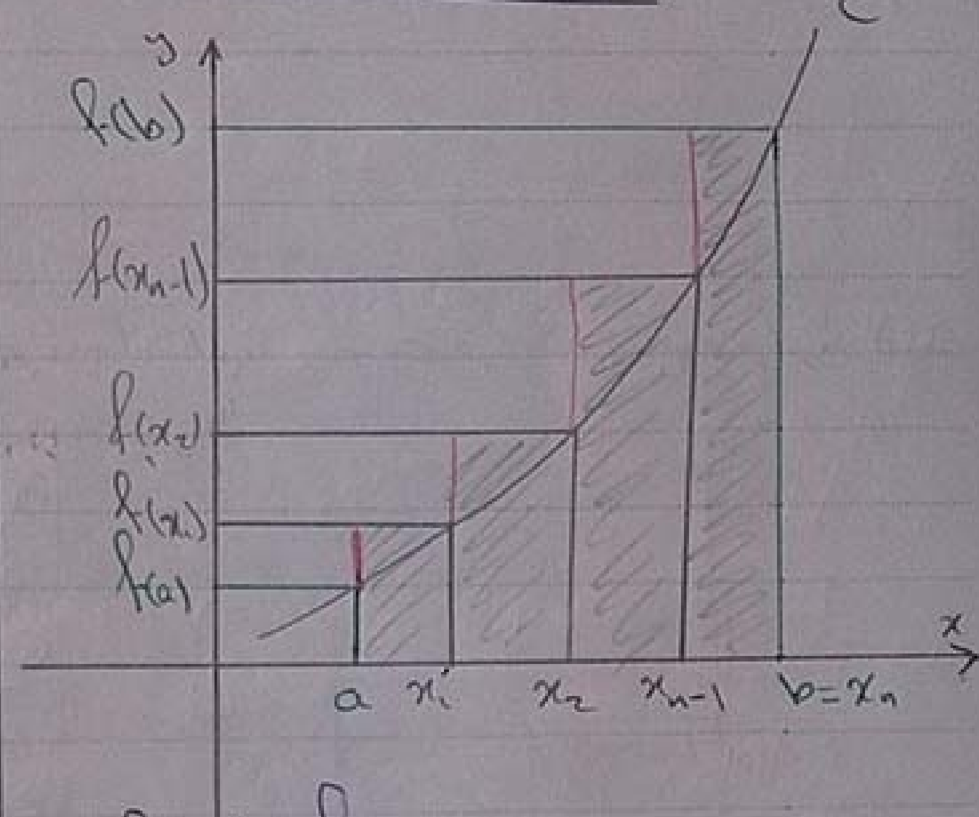
$x=a$ ، $x=b$ ، ox

$$L(f,P)=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\dots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

/ /

$$L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x_k$$

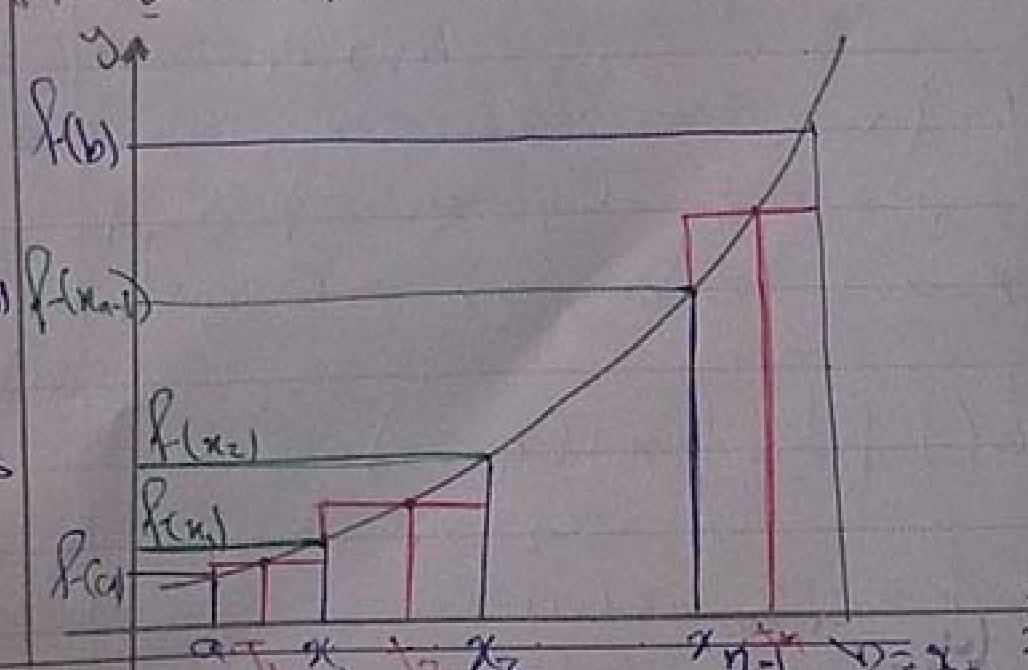
((وهي متسلسلة تزايدية محدودة من الأعلى فهي متقاربة))



$$U(f,P)=f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_n)(x_n-x_{n-1})$$

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

((متسلسلة متناقصة محدودة من الأدنى فهي متقاربة))



$$L(f,P)\leqslant U(f,P)$$

$$\boxed{\Delta x_k=\frac{b-a}{n}}$$

لو أخذنا المجموع الجديد

$$S(f,P)=f(t_1)(x_1-x_0)+f(t_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(t_n)(x_n-x_{n-1})$$

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$

$: x_1\leqslant t_1\leqslant x_2$

$$L(f,P)\leqslant S(f,P)\leqslant U(f,P)$$

مجموع ريمان :

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$

$$x_{k-1}\leqslant t_k\leqslant x_k$$

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$$

$$\Delta x=\max \Delta x_k : 1\leqslant k\leqslant n$$

التكامل المحدد :

اذا وجد A :

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$

((أي max تسعى الى الصفر))

عندئذ نرمز لـ A : $A=\int_a^b f\,dx$

/ /

مثال: احسب التكاملات التالية مستخدمت تعريف التكامل المجموع اليساري.

$I_1=\int_0^3 x^2\,dx$: ✓ $\quad I_2=\int_0^3 (x^2+1)\,dx \quad$ * $\quad I_3=\int_0^2 (x+1)\,dx$

$I_4=\int_1^3 x\,dx.$

$P=\{0=x_0<x_1<\dots<x_n=3\}$

$\Delta x=\Delta x_k=\frac{b-a}{n}=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n} \Longrightarrow$

$x_0=0,\ x_1=x_0+\frac{3}{n}=\frac{3}{n},\ x_2=x_0+2\frac{3}{n}=2\frac{3}{n},\ \dots$

$x_n=x_0+n\frac{3}{n}=n\frac{3}{n}$

$$\sigma(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k=\left[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)\right]\Delta x$$

$$=\left[f\left(\frac{3}{n}\right)+f\left(2\frac{3}{n}\right)+\dots+f\left(n\frac{3}{n}\right)\right]\frac{3}{n}$$

$$=\left[\left(\frac{3}{n}\right)^2+\left(2\frac{3}{n}\right)^2+\dots+\left(n\cdot\frac{3}{n}\right)^2\right]\frac{3}{n}=\left(\frac{3}{n}\right)^2\left[1+2^2+3^2+\dots+n^2\right]\frac{3}{n}$$

$$\sigma(f,P)=\frac{27}{n^3}\,\frac{1}{6}\,n(n-1)(2n+1)\Longrightarrow I=A=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{2}\,\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}=\frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left[2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right]$$

$\boxed{x_k\to 0}\Leftrightarrow\boxed{n\to\infty}$ $\qquad =9$

$$\int_0^3 x^2\,dx=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^3=\frac{1}{3}\left[27-0\right]=9.$$

تعريف: نقول عن الدالة f المستمرة على $[a,b]$ انها قابلة للتكامل على $[a,b]$ اذا وجد A بحيث يحقق ما يلي:

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k=\int_a^b f\,dx$$

$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$

$\Delta x=\max \Delta x_k.$

$\forall \varepsilon > 0 . \exists P_\varepsilon \; : P \supset P_\varepsilon \Longrightarrow | S(f,P) - A | < \varepsilon$
$[a,b]$

ونرمز لـ A بـ $\int_a^b f(x)\,dx$

مثال (٢): بين أن الدالة المعرفة على [0,1] كمايلي غير قابلة للتكامل:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$

$$P = \{ 0 = \underset{t_1}{x_0 \le x_1} \le \underset{t_2}{x_2} < \dots \le \underset{t_{n-1}}{x_{n-1}} \le \underset{t_n}{x_n} = 1 \}$$

$$t_k \in Q \Longrightarrow S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} + \dots\; x_n - \cancel{x_{n-1}} = 1 - 0 = 1$$

$$t_k \notin Q \Rightarrow S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

انتهت المحاضرة.

المحاضرة الحادية عشرة 2014/4/21

الخواص الأساسية
للتكامل المحدد

تعريف التكامل بدقة الجبائي، اذا كانت f دالة حقيقية معرفة ومحدودة على [a,b] عندئذ نقول عن f أنها قابلة للتكامل اذا وجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k = A$$

حيث نرمز لـ A بـ $\int_a^b f(x)\,dx$

$\Delta x = \max \Delta x_k \quad : t_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad , P = \{ 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \}$