- المحاضرة الرابعة عشر -

• المعادلات التفاضلية الجزئية التى تعامل كمعادلات عادية :

① . إذا كانت المعادلات التفاضلية الجزئية لا تحوي سوى المشتقات الجزئية بالنسبة لأحد المتغيرين فيمكن اعتبار المتغير الآخر وسيطاً ثابتاً وتكون ثوابت التكامل دوالاً كيفية في هذا الوسيط.

② . يمكن معالجة بعض المعادلات التفاضلية الجزئية بعملية تكامل بالنسبة لأحد المتغيرين أولاً ثم بعملية تكامل بالنسبة للمتغير الثاني على أن نأخذ في كل حالة ثابت تكامل هو دالة كيفية من المتغير الآخر.

① $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow z = \varphi(y)$

② . $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow z = \psi(x)$

③ . $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow z = \varphi(y)x + \psi(y)$

④ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow z = \psi(x).y + \phi(x)$

⑤ $P = r \Rightarrow z = \varphi(y)e^x + \psi(y)$

⑥ . $q = t \Rightarrow z = \varphi(x)e^y + \phi(x)$

إثبات (6) :

$$q = t \Rightarrow \frac{t}{q} = 1 \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln q = y + \psi(x)$$

$\int \frac{t}{q} = \ln q$ (لأن t هي المشتق الثاني لـy) $q = \frac{\partial z}{\partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\ln q = y + \psi(x) \Leftrightarrow e^{\ln q} = e^{y+\psi(x)} = e^y . e^{\psi(x)} = e^y . \varphi(x)$$

$$\Rightarrow q = U(x)\, e^{y} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} z = U(x)\, e^{y} + \phi(x).$$

وبنفس الطريقة نستنتج ⑤.

* المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الغير متجانسة:

نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى إنها خطية إذا كانت بالدرجة الأولى بالنسبة للمشتقين الجزئيين أي من الشكل:

$$P.p + Q.q = R$$

حيث: $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ، $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

وتسمى معادلة لاغرانج الغير متجانسة ونسمي الجملة:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

بالجملة الملحقة أو الجملة المساعدة.

مبرهنة:

الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى الغير متجانسة يعطى بالعلاقة: $F(u, v) = 0$

حيث: $u = c_1(x, y, z)$ ، $v = c_2(x, y, z)$

هما تكاملان أوليان للجملة الملحقة.

تمرين:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية أو (أوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية).

$$x.p + y.q = z$$

الجملة الملحقة للمعادلة هي:

$$\underset{①}{\frac{dx}{x}} = \underset{②}{\frac{dy}{y}} = \underset{③}{\frac{dz}{z}}$$

• التكامل الأولي لـ ① و ② :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln x = \ln y + c_1'$$

$$\Rightarrow e^{\ln x} = e^{\ln y + c_1'}$$

$$\Rightarrow x = e^{\ln y} + e^{c_1'} = y \cdot c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{x}{y}$$

• التكامل الأولي من ② و ③ :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln y = \ln z + c_2'$$

$$\Rightarrow e^{\ln y} = e^{\ln z + c_2'} = e^{\ln z} \cdot e^{c_2'}$$

$$\Rightarrow y = z \cdot c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{y}{z}$$

ومنه الحل العام أو «السطوح التكاملية للمعادلة ت.ج.ج.م»

$$F(u, v) = F(c_1, c_2) = 0$$

$$\therefore F(x/y, y/z) = 0$$

تمرين وظيفة:

أوجد السطوح التكاملية للمعادلة : $x^2 \cdot p + y^2 \cdot q = (x+y) \cdot z$ ،

السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية المار بمنحني معلوم ٢ :

إذا كان $u = c_1$ ، $v = c_2$ حل عام للجملة الملحقة فإنَّ الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية م١٣ هو: $F(u, v) = 0$

والمطلوب: تعيين الدالة F للحصول على السطح التكاملي المار بالمنحني المعلوم (٢)

• لنفترض أن المعادلات الوسيطية للمنحني (٢) هو:

$$x = x(t) \quad ، \quad y = y(t) \quad ، \quad z = z(t)$$

$$\left.\begin{aligned} u(x(t), y(t), z(t)) &= c_1 \\ v(x(t), y(t), z(t)) &= c_2 \end{aligned}\right\}$$

نحذف الوسيط t من المعادلتين نحصل على السطح التكاملي المار بالمنحني (Γ).

مثال: أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$(2x-y-z)p+(2y-z-x)q=(2z-x-y)$$

والمار بالمنحني $x=0$ ، $y=c$.

الحل: الجملة الملحقة المساعدة هي:

$$\underset{①}{\frac{dx}{2x-y-z}}=\underset{②}{\frac{dy}{2y-z-x}}=\underset{③}{\frac{dz}{2z-x-y}}$$

بجمع النسب:

$$\frac{dx+dy+dz}{2x-y-z+2y-z-x+2z-x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}$$

$$dx+dy+dz=0 \Rightarrow d(x+y+z)=0$$

تكامل أولي للجملة الملحقة $x+y+z=c_1$

• للحصول على التكامل الأولي الثاني:

نطرح ② من ① ونطرح ③ من ②:

$$\frac{dx-dy}{2x-y-z-2y+x+z}=\frac{dy-dz}{2y-x-z-2z+x+y}$$

$$\frac{dx-dy}{3x-3y}=\frac{dy-dz}{3y-3z}$$

$$\frac{d(x-y)}{\cancel{3}(x-y)}=\frac{d(y-z)}{\cancel{3}(y-z)} \Rightarrow Ln(x-y)=Ln(y-z)+Ln(c_2)$$

/ /

$$\Rightarrow \ln(x-y) = \ln(c_2(y-z))$$

$$e^{\ln(x-y)} = e^{\ln(c_2(y-z))} \Rightarrow x-y = c_2(y-z)$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{x-y}{y-z}$$

ومنه الحل العام أو السطوح التكاملية هي:

$$F(u,v)=0 \quad , F(c_1,c_2)=0$$

$$F\left(x+y+z, \frac{x-y}{y-z}\right) = 0$$

① $x=0$ ② $y=c$ ③ $c_1 = x+y+z$ ، ④ $c_2 = \frac{x-y}{y-z}$

نعوض ① و ② في ③، ④:

$$C_1 = c+z \quad , C_2 = \frac{-c}{c-z}$$

$$z = C_1 - c \Rightarrow C_2 = \frac{-c}{2c-C_1}$$

ومنه السطح التكاملي المار بالمنحني (٢) هو:

$$C_2 = \frac{-c}{2c-C_1} \quad , \frac{x-y}{y-z} = \frac{-c}{2c-(x+y+z)}$$

وظيفة: أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية:

$$x\cdot y^3\cdot p + x^2\cdot z^2\cdot q = y^3\cdot z$$

والمار بالمنحني: $x=-z^3$ ، $y=z^2$.

*معادلة لاغرانج المتجانسة أو المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى المتجانسة وهي من الشكل:

$$P.p+Q.q=0$$

والجملة الملحقة هي:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{0}$$

فيكون دوماً محقق أنّ: $\boxed{z=c_1}$ وهو التكامل الأولي للجملة الملحقة.

$$F(z,v)=0$$

<u>مثال:</u>. أوجد السطوح التكاملية للمعادلة:

$$y.p-xq=0$$

ثمّ: أوجد السطح التكاملي للمعادلة المارة بالمنحني Γ المعين بالمعادلات:

$$y=0\ ،\ x^2-z^2=1$$

<u>الحل:</u> الجملة الملحقة:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$$

$$-x.dx=y.dy\Rightarrow y.dy+x.dx=0$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c'_2\Rightarrow x^2+y^2=c_2$$

ومنه الحل العام للمعادلة ت.ج.ج.م المتجانسة

$$F(z,x^2+y^2)=0$$

ولنوجد الآن السطح التكاملي:

$$①.\ y=0,\ ②\ x^2-z^2=1,\ ③\ z=c_1,\ ④.\ c_2=x^2+y^2$$

- نعوض ① في ④: $c_2=x^2$
- نعوض ② في ③: $x^2-c_1^2=1\Rightarrow x^2=1+c_1^2$

/ /

$$\boxed{C_2 = 1 + C_1^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 + z^2 .$$

وهو السطح التكاملي المار بالمنحني (٣).

وظيفة: أوجد الحل العام لـ: م.ت.ج.خ.م أو (السطوح التكاملية) في كل مما يأتي:

① $y \cdot z \cdot P - x \cdot z \cdot q = e^{z}$

② $(y-z)^2 \cdot P + x \cdot z \cdot q = x \cdot y$

③ $P \cdot \sin^2 x + q \cdot tg\, z = \cos^2(z)$

④ $(y+z) \cdot P + (x+z)\, q = x - y$

⑤ $2(y-x) + 2P(y+z) - 2q(x+z) = 0$

-انتهت المحاضرة الرابعة عشر-