المحاضرة الثالثة 17/3/2014

الإيزومورفيزم

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u : A \to B \in Mor(\mathcal{L})$ حيث $A, B \in ob(\mathcal{L})$

نقول عن المورفيزم u إنه إيزومورفيزم، إذا وجد مورفيزم آخر $v : B \to A \in Mor(\mathcal{L})$

بحيث $\boxed{v.u = I_A}$ ، $\boxed{u.v = I_B}$

مبرهنة لتكن $\mathcal{L}$ فئة عندئذ:

① تركيب إيزومورفيزمين هو إيزومورفيزم

② إذا كان u إيزومورفيزم عندئذ u مونومورفيزم و ابيمورفيزم

③ المورفيزم المطابق إيزومورفيزم

الإثبات:

① ليكن $u : A \to B$ ، $v : B \to D$ إيزومورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ ..

عندئذ حسب التعريف يوجد: $u_0 : B \to A$ ، $v_0 : D \to B$

بحيث: $u_0.u = I_A$ ، $u.u_0 = I_B$

$v_0.v = I_B$ ، $v.v_0 = I_D$

لنأخذ المورفيزم $u_0.v_0$. $u_0.v_0 : D \to A$

$v.u : A \to D$

1°) $(u_0.v_0).(v.u) = u_0.(v_0.v).u = u_0.I_B.u = u_0.u = I_A$

2°) $(v.u).(u_0.v_0) = v.(u.u_0).v_0 = v.I_B.v_0 = v.v_0 = I_D$

حسب ما سبق نجد أن $v.u$ إيزومورفيزم

② ليكن u إيزومورفيزم عندئذ ~~الجداء~~ $u_0.u$ مونومورفيزم ومنه u مونومورفيزم ~~(...)~~

يوجد $u_0 : B \to A$ بحيث $u_0.u = I_A$ و $u.u_0 = I_B$

بما أن المطابق I_A مونومورفيزم فإن الجداء $u_0.u$ مونومورفيزم ومنه u مونومورفيزم

بما أن المطابق I_B ابيمورفيزم فإن الجداء $u.u_0$ ابيمورفيزم ومنه u ابيمورفيزم

(حسب المبرهنة الأولى)

③ واضح « المطابق معكوس نفسه »

الدوال

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ ، $\mathcal{R}$ فئتين

نقول أنه يوجد لدينا دالي $F: \mathcal{L} \to \mathcal{R}$ إذا وجد

① تطبيق

$$F: ob(\mathcal{L}) \to ob(\mathcal{R})$$
$$A \mapsto F(A)$$

② تطبيق

$$F: Mor(\mathcal{L}) \to Mor(\mathcal{R})$$
$$u \mapsto F(u)$$

يحققان:

(1°) $\forall A \in ob(\mathcal{L})\ ;\ F(I_A) = I_{F(A)}$

(2°) $\forall f, g \in Mor(\mathcal{L})\ ;\ F(f.g) = F(f).F(g)$

نقول في هذه الحالة أن الدالي F هو دالي مباشر (موافق للتغير)

ونقول عن الدالي F إنه دالي غير مباشر (مخالف للتغير) إذا حقق:

$$F(f.g) = F(g).F(f)$$

«أي أن هذه التسمية تتعلق بالشرط الثاني»

$$u: A \to B$$
$$F: \mathcal{L}(A,B) \longrightarrow \mathcal{R}(F(A), F(B))$$
$$F(A,B): \mathcal{L}(A,B) \longrightarrow \mathcal{R}(F(A), F(B))$$
$$F(u): F(A) \to F(B)$$

مثال: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $\mathcal{L}^\circ$ فئة التشويه للفئة $\mathcal{L}$..

ولنأخذ الفئة $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^\circ \times \mathcal{L}$

* إن أشياء الفئة $\mathcal{L}'$ هي الأزواج المرتبة (A,B) : $A, B \in ob(\mathcal{L})$

«طالما أن أشياء الفئة $\mathcal{L}^\circ$ هي نفس أشياء الفئة $\mathcal{L}$»

* كما أن مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}'$ هي الأزواج المرتبة (u, v) حيث

$v \in Mor(\mathcal{L})$ ، $u \in Mor(\mathcal{L}^\circ)$

لنعرف دالي :

$$F : \mathcal{L}' \longrightarrow Set's$$

① تطبيق الأشياء : $F : ob(\mathcal{L}') \longrightarrow ob(Set's)$

$$F(A,B) = \mathcal{L}(A,B)$$

② تطبيق المورفيزمات $F : Mor(\mathcal{L}') \longrightarrow Mor(Set's)$

ولإيجاد هذا التطبيق

ليكن : $f : A \longrightarrow B \in Mor(\mathcal{L}')$ $\quad A , B \in ob(\mathcal{L}')$

عندئذ $f = (f_1, f_2)$, $A = (A_1, A_2)$, $B\ (B_1, B_2)$

حيث $A_1, A_2, B_1, B_2 \in ob(\mathcal{L})$

$$f_1 \in Mor(\mathcal{L}^{\circ}) \ , \ f_2 \in Mor(\mathcal{L})$$

$$f_1 : A_1 \longrightarrow B_1 \ \in \mathcal{L}^{\circ}(A_1, B_1)$$

$$f_2 : A_2 \longrightarrow B_2 \ \in \mathcal{L}(A_2, B_2)$$

ولدينا $\mathcal{L}^{\circ}(A_1, B_1) = \mathcal{L}(B_1, A_1)$

$$F : \mathcal{L}'(A,B) \xrightarrow{?} Mor(Set's)$$

$$F(f) \in Mor(Set's)$$

$$F(f_1, f_2) : \mathcal{L}(A_1, A_2) \longrightarrow \mathcal{L}(B_1, B_2)$$

$$F(f_1, f_2)(u) = f_2 . u . f_1$$

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[dr, "f_1"] & & \\
& A_1 \arrow[r, "u"] & A_2 \arrow[dr, "f_2"] & \\
& & & B_2
\end{tikzcd}$$

ولنثبت انه تطبيق

ليكن $u, v \in \mathcal{L}(A_1, A_2)$

بحيث $u = v)$

$$f_2 . u = f_2 . v$$

حيث $f_2 . u . f_1 = f_2 . v . f_1$

B_7 $\quad F(f_1, f_2)(u) = F(f_1, f_2)(v)$

وبقي اثبات شرط الدالي : الشرط الاول : صورة المطابق مطابق

ودراسة فيما اذا كان مباشر أو عكس مباشر من خلال قاعدة الربط التي عرفناها.

$$I_A = (I_{A_1}, I_{A_2})$$

انتهت المحاضرة