م٢

محاضرة ١ — بسم الله الرحمن الرحيم — د: صميم جديد

* تمهيد :

لكن لدينا أربع مراكز إنتاج و 3 مراكز استهلاك. إن الكميات و التكلفة اللازمة لنقل هذه الكميات من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك معطاة بالجدول التالي :

مراكز الإنتاج \ مراكز الاستهلاك	1	2	3	الكميات المتوفرة
1	1 X_{11}	2 X_{12}	6 X_{13}	11
2	3 X_{21}	8 X_{22}	4 X_{23}	9
3	7 X_{31}	10 X_{32}	4 X_{33}	13
4	12 X_{41}	8 X_{42}	5 X_{43}	7
الكميات المطلوبة	18	10	12	40 \ 40

المطلوب :

1- حدد نوع مسألة النقل المعطاة.

2- اكتب النموذج الرياضي للمسألة السابقة بحيث تحقق أقل كلفة

1- نلاحظ أن :

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 40$$

هذه العلاقة هامة والأدلة هامة

← النموذج مغلق (متوازن)

2- من أجل صياغة النموذج نلاحظ ما يلي :

تكلفة النقل بين مركز الإنتاج الأول إلى جميع مراكز الاستهلاك

$1X_{11}+2X_{12}+6X_{13}$

تكلفة النقل من مركز الإنتاج الثاني إلى جميع مراكز الاستهلاك

$3X_{12}+8X_{22}+1X_{23}$

$7X_{31}+10X_{32}+4X_{33}$ " من الثالث إلى جميع مراكز الاستهلاك "

$12X_{41}+8X_{42}+5X_{43}$ «من الرابع إلى جميع مراكز الاستقبال»

ومنه فإن التكلفة الإجمالية:

$$L=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = (1X_{11}+2X_{12}+6X_{13})+(3X_{12}+8X_{22}+1X_{23})$$
$$+(7X_{31}+10X_{32}+4X_{33})+(12X_{41}+8X_{42}+5X_{43})$$

الشروط:

* شروط الكميات المتوفرة: «مجموع الأسطر لأنها تتعلق بالإرسالات الأفقية»

$X_{11}+X_{12}+X_{13}=11$

$X_{21}+X_{22}+X_{23}=9$

$X_{31}+X_{32}+X_{33}=13$

$X_{41}+X_{42}+X_{43}=7$

* ملاحظة: «وضعنا الإشارة المساواة لأن النموذج مغلق»

* شروط الكميات المطلوبة: «مجموع الأعمدة لأنها تتعلق بالإرسالات العمودية»

$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}=18$

$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}=10$

$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}=12$

* شروط عدم السلبية:

$$x_{ij}\geq 0 \; ; \; i=\overline{1,4} \quad , \; j=\overline{1,3}$$

وعليه فإن النموذج الرياضي يكون:

أوجد القيمة ~~الكبرى~~ الصغرى لـ L:

أي: «يجب كتابة منشور L» هكذا:

$$L=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow Min$$

$$L=(X_{11}+2X_{12}+6X_{13})+(3X_{12}+8X_{22}+X_{23})+(7X_{31}+10X_{32}+4X_{33})$$
$$+(12X_{41}+8X_{42}+5X_{43}) \longrightarrow Min$$

وفق الشروط

$X_{11}+X_{12}+X_{13}=11$

$X_{21}+X_{22}+X_{23}=9$

$X_{31}+X_{32}+X_{33}=13$

$X_{41}+X_{42}+X_{43}=7$

$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}=18$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}=16$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}=12$$
$$X_{ij} \geq 0 \; ; \; i=\overline{1,4} \quad , \; j=\overline{1,3}$$

* تمرين :

لدينا خمس مشاريع $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$ تتزود بالمواد الأولية من ثلاث مصانع (A_1, A_2, A_3) حيث أن الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع هي : 110 ، 120 ، 130 طن على الترتيب وحاجة كل من المشاريع على الترتيب هي 100 ، 40 ، 60 ، 80 ، 90 وكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المشروع معطاة بالجدول :

مراكز الاستهلاك المشاريع / مراكز الإنتاج المصانع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الكميات المتوفرة الطاقة الإنتاجية
A_1	4 X_{11}	1 X_{12}	3 X_{13}	6 X_{14}	9 X_{15}	130
A_2	5 X_{21}	2 X_{22}	6 X_{23}	4 X_{24}	8 X_{25}	120
A_3	6 X_{31}	4 X_{32}	2 X_{33}	5 X_{34}	7 X_{35}	110
الحاجة الكميات المطلوبة	90	80	60	40	100	370 \ 360

المطلوب :

1- صياغة نموذج رياضي بحيث تكون تكلفة النقل أدنى ما يمكن .

2- حل معطيات المسألة بحيث نشكل نموذج رياضي مغلق ثم اكتب النموذج الجديد.

الحل : 1- نلاحظ أن النموذج المعطى مفتوح لأن :

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 360 \quad , \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 370$$

أي :

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \neq \sum_{j=1}^{4} b_j$$

مع ملاحظة أن : $\sum^{4} b_j > \sum^{3} a_i$

أي أن المسألة غير متوازنة من نوع عجز في الإنتاج لذا نضيف مركز إنتاج وهمي طاقته :

$370 - 360 = 10$

حيث تكون كلفة النقل من هذا المصنع إلى جميع المشاريع السابقة تساوي الصفر

المشاريع / المصانع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الطاقة الإنتاجية
A_1	4 x_{11}	1 x_{12}	3 x_{13}	6 x_{14}	9 x_{15}	130
A_2	5 x_{21}	2 x_{22}	6 x_{23}	4 x_{24}	8 x_{25}	120
A_3	6 x_{31}	4 x_{32}	2 x_{33}	5 x_{34}	7 x_{35}	110
A_4	0 x_{41}	0 x_{42}	0 x_{43}	0 x_{44}	0 x_{45}	10
الحاجة	90	80	60	40	100	370 / 370

الآن نكتب الشروط

* شروط النقل:

تكلفة النقل من المصنع الأول إلى جميع المراكز الاستهلاكية:

$4x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 9x_{15}$

تكلفة النقل من المصنع الثاني إلى جميع المراكز الاستهلاكية:

$5x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 4x_{24} + 8x_{25}$

$6x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34} + 7x_{35}$ «من المركز الثالث إلى جميع المراكز»

$0x_{41} + 0x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} + 0x_{45}$ «من المركز الرابع إلى جميع المراكز»

وبالتالي تكون الكلفة الإجمالية:

$$L = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$$

$$= (4x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 9x_{15}) + (5x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 4x_{24} + 8x_{25}) + (6x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34} + 7x_{35}) + (0x_{41} + 0x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} + 0x_{45})$$

شروط الكميات المتوفرة: «المتساويات الأفقية»

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=130$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=120$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=110$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=10$

* شروط الكميات المطلوبة : "مجموع الإكساءات العمودية"

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=90$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=80$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=60$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=40$

$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=100$

* شروط عدم السلبية :

$x_{ij}\geq 0 \quad ; i=\overline{1,4} \quad , j=\overline{1,5}$

وبالتالي يكون النموذج الرياضي : أوجد القيمة الصغرى لـ

$$L=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}=(4x_{11}+x_{12}+3x_{13}+6x_{14}+4x_{24}+8x_{25})+(5x_{21}+2x_{22}+6x_{23}+4x_{24}+8x_{25})+(6x_{31}+4x_{32}+2x_{33}+5x_{34}+7x_{35})+(0x_{41}+0x_{42}+0x_{43}+0x_{44}+0x_{45})\to Min$$

وفق الشروط :

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=130$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=120$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=110$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=10$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=90$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=80$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=60$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=40$

$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=100$

$x_{ij}\geq 0 \quad ; i=\overline{1,4} \quad , j=\overline{1,5}$

ج- ملاحظة هامة لهذا الطلب :

التغير: لا يكون التغير بإضافة مركز إنتاج أو مركز استهلاك يكون التغير في معطيات المسألة ضمن حدود تضمن أن تكون الكميات المتوفرة (الطاقة الإنتاجية) مساوية للكميات المطلوبة (الحاجة).

الأفضل أن نضيف دائماً.

لذا يكون الحل نفس الجدول الأساسي ونضيف 10 لأي طاقة أي:

١١٠ + ١٠ = ١٢٠

المشاريع / المصانع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الطاقة الإنتاجية
A_1	4 x_{11}	1 x_{12}	3 x_{13}	6 x_{14}	9 x_{15}	130
A_2	5 x_{21}	2 x_{22}	6 x_{23}	4 x_{24}	8 x_{25}	120
A_3	6 x_{31}	4 x_{32}	2 x_{33}	5 x_{34}	7 x_{35}	120 هنا غيرنا
الحاجة	90	80	60	40	100	370 / 370

فيكون النموذج الجديد:

الأصغري:

$$L=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}\,x_{ij}$$

$$=(4x_{11}+1x_{12}+3x_{13}+6x_{14}+9x_{15})+(5x_{21}+2x_{22}+6x_{23}+4x_{24}+8x_{25})+(6x_{31}+4x_{32}+2x_{33}+5x_{34}+7x_{35}) \longrightarrow \text{Min}$$

وفق الشروط:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=130$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=120$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=\underline{120}$$ التغير
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=90$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=80$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=60$$

$$X_{14}+X_{24}+X_{34}=40$$

$$X_{15}+X_{25}+X_{35}=100$$

$$X_{ij}\geq 0 \;;\; i=\overline{1,3} \quad , \; j=\overline{1,5}$$

التغير

***نموذج الإسناد:**

تقسم هذه النماذج بالإسناد الأفضل لمختلف الموارد الاقتصادية والإنتاجية على مختلف الأعمال المراد إنجازها وتمتاز هذه المسائل ببساطة صياغتها للمشاكل على عكس مسائل النقل حيث تتميز بالبساطة والسهولة وفي معظم هذه المسائل تتساوى كم الأعمال المراد إنجازها مع عدد الموارد وتابع الهدف يمكن أن يأخذ Max or Min

وصف المسألة:

لنفرض أننا نريد توزيع n عاملاً (آلة) على n عملاً بحيث يقوم كل عامل بإنجاز عمل واحد فقط وبحيث يكون إجمالي الإنتاج لهم أكبر ما يمكن وذلك ضمن الإنتاجية المحددة لكل منهم. نرمز بـ C_{ij} لإنتاج العامل i من العمل j.

عندئذٍ تعطى مصفوفة الإنتاج بالشكل:

مصفوفة الإنتاج

$$C_{ij}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث أن هذه المصفوفة يمكن أن تكون عبرة عن تكاليف العمل بدلاً من الإنتاج.

لصياغة النموذج الرياضي نرمز بـ X_{ij} للمتحول الذي يأخذ قيمة تساوي الواحد. عندما نعين العامل i لإنجاز العمل j ويأخذ قيمة مساوية للصفر وتكتب مصفوفة المتحولات بالشكل الآتي:

مصفوفة المتحولات

$$X_{ij}=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix}$$

- بما أن العامل الواحد لا يمكنه أن يأخذ إلا عملاً واحداً فقط (بمعنى أن واحد فقط من المتحولات X_{ij} في السطر i سيأخذ قيمة تساوي الواحد، أما بقية المتحولات في ذلك السطر ستأخذ قيماً تساوي الصفر.

- وبما أن العمل الواحد لا يمكنه أن ينفذ إلا من قبل عامل واحد فقط إذا يعني أن واحد فقط من المتحولات X_{ij} في العمود j سيأخذ قيمة تساوي الواحد وبقية المتحولات في ذلك العمود ستأخذ قيمة تساوي الصفر.

*صياغة النموذج:

تابع الهدف
$$Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,X_{ij}$$

ضمن الشروط:

- المجموعة الأولى من الشروط:

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}+X_{12}+\dots+X_{1n}=1 \\ X_{21}+X_{22}+\dots+X_{2n}=1 \\ \vdots \\ X_{n1}+X_{n2}+\dots+X_{nn}=1 \end{array}\right\}$$

دائماً الطرف الثاني يساوي الواحد

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}+X_{21}+\dots+X_{n1}=1 \\ X_{12}+X_{22}+\dots+X_{n2}=1 \\ \vdots \\ X_{1n}+X_{2n}+\dots+X_{nn}=1 \end{array}\right\}$$

المجموعة الثانية من الشروط

- شروط عدم السلبية:

$$X_{ij}\geq 0 \;;\; i=\overline{1,n} \;\&\; j=\overline{1,n}$$

وبذلك يكون النموذج الرياضي : أوجد:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,X_{ij} \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط الموافقة.

*تمرين:

لنفرض أنه لدينا 3 أعمال (A_1, A_2, A_3) و 3 آليات (B_1, B_2, B_3) كل عمل عليه أن ينفذ بشكل كامل وباستخدام آلية من الآلات الثلاثة ويقابل كل آلة عليها تنفيذ ~~...~~ أيا من الأعمال الثلاثة والمطلوب:

تخصيص هذه الآليات للأعمال الموجودة بحيث نحصل على الإسناد الأمثل أي الإسناد الذي يعطينا

التكلفة الكلية الدنيا لها بأن تكاليف هذه الأعمال مبينة بالجدول المرافق وكل آلة مخصصة لأداء عمل واحد وكل عمل ينجز بواسطة آلة واحدة .

- ملاحظة: تركنا كتابة الجدول بأي فرضيات والحل نوجده بأنفسنا .

الحل: نفرض أن X_{ij} تأخذ القيمة 1 إذا أسند العمل إلى الآلة وتأخذ القيمة 0 إذا لم يسند العمل إلى الآلة وبالتالي $X_{ij} \Rightarrow 0$ ، 1

وبالتالي بوضع فرضيات للتكلفة يكون الجدول بالشكل :

الأعمال \ الآلات	B_1	B_2	B_3	في حالة استخدام الآلة
A_1	1 X_{11}	2 X_{12}	4 X_{13}	1
A_2	3 X_{21}	2 X_{22}	1 X_{23}	1
A_3	1 X_{31}	2 X_{32}	2 X_{33}	1
في حال انجز العمل	1	1	1	

وبالتالي يكون النموذج أوجد

$$L=(X_{11}+2X_{12}+4X_{13})+(3X_{21}+2X_{22}+X_{23})+(X_{31}+2X_{32}+2X_{33}) \longrightarrow Min$$

وفق الشروط:

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}=1$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23}=1$$
$$X_{31}+X_{32}+X_{33}=1$$
$$X_{11}+X_{21}+X_{31}=1$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}=1$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33}=1$$
$$X_{ij} \geqslant 0 \quad ; i=\overline{1,n} \quad , j=\overline{1,n}$$

* مسألة التفتيش:

لدى شركة مرتبتان للتفتيش (المرتبة الأولى و الثانية) والمطلوب ،

بإسناد مهمة ضبط الجودة لهم ويتعين على الأقل تدقيق ١٨٠٠ قطعة يومياً خلال 8 ساعات عمل حيث يستطيع مفتشو المرتبة الأولى تدقيق القطع بمعدل 25 قطعة في الساعة وبدقة 98% أما مفتشو المرتبة الثانية يستطيعون تدقيق القطع بمعدل ١٥ قطعة بالساعة وبدقة 95% إن معدل أجر مفتش المرتبة الأولى ٤٠٠ ليرة للساعة ومعدل أجر مفتش المرتبة الثانية 300 ليرة للساعة وفي كل مرة خطأ المفتش تتكفل الشركة بدفع ٢٠٠ ل.س حيث يتوفر لدى الشركة 8 مفتشين من المرتبة الأولى و ١٠ من المرتبة الثانية وترغب الشركة تحديد الإسناد الأمثل للمفتشين لجعل التكلفة أصغرية للمفتشين :

الحل:

القطع المدققة	25	15
الدقة	98%	95%
الأجر	٤٠٠	300
عدد المفتشين	8	١٠

نفرض :

X_1 عدد المفتشين من المرتبة الأولى المكلفين بالتفتيش.

X_2 عدد المفتشين من المرتبة الثانية المكلفين بالتفتيش.

بالتالي تكون الشروط:

تتوفر (أي يمكن أن يتوفر 8 مفتشين على الأكثر)

شروط المفتشين $\left\{ \begin{array}{l} X_1 \leq 8 \\ X_2 \leq 10 \end{array} \right.$

$$\left.\begin{array}{l} 8 \times 25 X_1 \\ 10 \times 15 X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 200 X_1 + 150 X_2 \geq 1800$$

حيث أن مفتشي المرتبة الأولى والثانية يجب أن يدققوا على الأقل ١٨٠٠ قطعة

- شروط الأجور:

ماذا يكلف مفتش الدرجة الأولى للشركة :

أجرة مفتش درجة أولى — نسبة الخطأ

$$(400 + 200 \times 2\% \times 25) X_1 = (400 + 200 \times \frac{2}{100} \times 25) X_1$$

$$= (400 + 100) X_1 = 500 X_1$$

ماذا يكلف مفتش الدرجة الثانية للشركة :

$$(300 + 200 \times 5\% \times 15) X_2 = (300 + 200 \times \frac{5}{100} \times 15) X_2$$

$$= (300 + 150) X_2 = 450 X_2$$

وبما أن مدة العمل هي 8 ساعات بالتالي يكون النموذج:

أوجد:

$$L = 8(500x_1 + 450x_2) \rightarrow Min$$

وفق الشروط:

$$x_1 \leq 8$$

$$x_2 \leq 10$$

$$200x_1 + 150x_2 \geq 1800$$

$$x_{ij} \geq 0 \;;\; i = \overline{1,2}$$

انتهت المحاضرة،

yehia.D