مشتقات أشعة الواحدة في الإحداثيات الديكارتية :

لتكن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ أشعة الواحدة على الحملة المتحركة $O_1X_1Y_1Z_1$ التي تتحرك بالنسبة للحملة الثابتة $OXYZ$ نلاحظ أن أشعة الواحدة ثابتة في الطول ومتغيرة في الاتجاه لذلك نأخذ مشتقاتها بالنسبة للزمن

- لنوجد مشتقات هذه الأشعة بالنسبة للزمن :

لنوجد مشتقة شعاع الواحدة $\vec{i}$: (لنوجد اشتقاق $\vec{k}\vec{j}$ بشكل مشابه)

لنأخذ الشعاع $\vec{i} = \vec{OA}$ يقع على المحور OX ويبعد عن المبدأ (O) بمقدار واحد

وبالتالي نستطيع أن نكتب :

$$\vec{OA} = \vec{i} \rightarrow \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{\partial \vec{r_A}}{dt} = \vec{V_A}$$

ونعلم أن : شعاع الوضع للنقطة A هو $\vec{r_A}$ و $\vec{V_A}$

$$\vec{V_A} = \vec{\omega} \times \vec{r_A} = \vec{\omega} \times \vec{i}$$

حيث ω السرعة الزاوية لشعاع الدوران

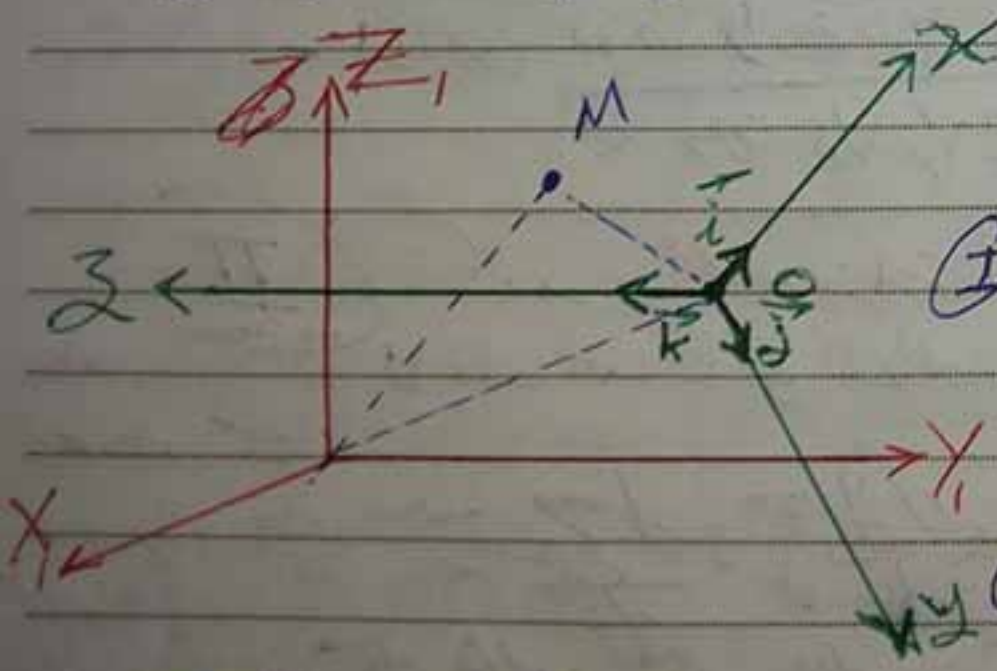
وبالتالي ينتج لدينا :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{i}}{\partial t} = \vec{\omega} \times \vec{i} \\ \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{\omega} \times \vec{j} \\ \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = \vec{\omega} \times \vec{k} \end{array} \right.$$

صيغ بوامون

(I) تركيب السرع :

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك في الحملة الإحداثية $oxyz$ التي تدور حول $O_1X_1Y_1Z_1$



عندئذ :

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$$

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (I)$$

حيث $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ أشعة الواحدة على المحاور الإحداثية المتحركة.

وهي أهل الحصول على سرعة النقطة المادية بالنسبة للحملة الأساسية $OXYZ$

نشتق (I) بالنسبة للزمن

$$\frac{d\vec{O_1M}}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Subject : .....

1 1

السرعة المطلقة $\frac{dO_1M}{dt} = \vec{V_a}$ نعطينا أن.

$\frac{dO_1O}{dt} = \vec{V_0}$ *

$x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} = \vec{V_r}$ السرعة النسبية.

أما بالنسبة لـ $x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$ فإن

$$x\frac{d\vec{i}}{dt} = x(\vec{\omega} \times \vec{i}) = \vec{\omega} \times x\vec{i}$$
$$y\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times y\vec{j}$$
$$z\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times z\vec{k}$$

$$x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\vec{\omega} \times \underbrace{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}_{\vec{OM}} + \vec{V_0} = \vec{V_e}$$ السرعة الجرية

$$\Rightarrow \vec{V_e} = \vec{V_0} + \vec{\omega} \times \vec{OM} \Rightarrow \boxed{\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}}$$

السرعة المطلقة لنقطة مادية تساوي المجموع الشعاعي للسرعتين الجرية والنسبية.

- إذا كان يوجد زاوية بين $\vec{V_r}$ و $\vec{V_e}$ فإن $\vec{V_0}$ يحسب كما يلي:

$$\vec{V_a} = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\alpha}$$

تركيب السرعة التسارعات:

لإيجاد التسارع المطلق نشتق العلاقة (II) بالنسبة للزمن:

$$\frac{d^2\vec{O_1M}}{dt^2} = \frac{d\vec{V_a}}{dt} = \frac{d\vec{V_0}}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$
$$+ \frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}$$
$$+ x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}$$

Subject : .....

$$\frac{d\vec{V_a}}{dt} = \frac{d\vec{V_o}}{dt} + (x''\vec{i}+y''\vec{j}+z''\vec{k}) + 2(x'\frac{d\vec{i}}{dt}+y'\frac{d\vec{j}}{dt}+z'\frac{d\vec{k}}{dt}) + (x\frac{d^2\vec{i}}{dt}+y\frac{d^2\vec{j}}{dt}+z\frac{d^2\vec{k}}{dt})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{V_a}}{dt} = \vec{\Gamma_a}}$$ التسارع المطلق

$$\boxed{\frac{d\vec{V_o}}{dt} = \vec{\Gamma_o}}$$ تسارع الحلة المتحركة بالنسبة للثابتة

$$\boxed{x''\vec{i}+y''\vec{j}+z''\vec{k} = \vec{\Gamma_r}}$$ التسارع النسبي

$$\boxed{\vec{\Gamma_e} = \vec{\Gamma_o} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt}}$$ التسارع الجري

$$x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} = x\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right) = x\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{i}) = x\left[\frac{d\omega}{dt}\times i + \omega\times\frac{d\vec{i}}{dt}\right]$$ نعلم

$$= x\left[\vec{\varepsilon}\times\vec{i} + \vec{\omega}(\vec{\omega}\times\vec{i}\,)\right] = \vec{\varepsilon}\times x\vec{i} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times x\vec{i})$$

$$y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} = \vec{\varepsilon}\times y\vec{j} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times y\vec{j})$$

$$z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} = \vec{\varepsilon}\times z\vec{k} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times z\vec{k})$$

$$x\frac{d^2\vec{i}}{dt} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\boxed{\vec{\Gamma_e} = \vec{\Gamma_o} + \vec{\varepsilon}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r}}$$

r و ω متعامدان
حالة كرة والمحور $a=0$

نعلم علاقة لاغرانج:

$$a\times(b\times c) = b(a\cdot c) - c(a\cdot b)$$

$$\Rightarrow 2\left(x'\frac{d\vec{i}}{dt}+y'\frac{d\vec{j}}{dt}+z'\frac{d\vec{k}}{dt}\right) = 2\left(x'(\vec{\omega}\times\vec{i}) + j(\vec{\omega}\times\vec{j}) + z'(\vec{\omega}\times\vec{k})\right]$$

$$= 2\left[\vec{\omega}\times(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})\right] = 2(\vec{\omega}\times\vec{V_r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma_c} = 2(\vec{\omega}\times\vec{V_r})}$$ التسارع المتمم

Subject : .....

/ /

$$\Rightarrow \left\{ \vec{\Gamma_a} = \vec{\Gamma_e} + \vec{\Gamma_r} + \vec{\Gamma_c} \right.$$

التسارع المطلق = التسارع الجري + التسارع النسبي + التسارع المتمم

$$m\vec{\Gamma_a} = \vec{f} \Rightarrow m\vec{\Gamma_r} + m\vec{\Gamma_e} + m\vec{\Gamma_c} = \vec{f}$$ ، لكن

$$m\vec{\Gamma_r} = \vec{F} - m\vec{\Gamma_e} - m\vec{\Gamma_c}$$

التسارع النسبي بالنسبة للجملة المتحركة

$$\vec{J_e} = -m\vec{\Gamma_e}$$ قوة العطالة الجرية

وفرضي:

$$\vec{J_c} = -m\vec{\Gamma_c}$$ قوة العطالة المتممة

$$m\vec{\Gamma_r} = \vec{F} + \vec{J_e} + \vec{J_c}$$

حيث $\vec{J_e}$ قوة العطالة الجرية و $\vec{J_e}$ قوة العطالة المتممة

بالاسقاط ⟸ الاحداثيات الديكارتية.

$$\begin{cases} mx'' = F_x + J_{e_x} + J_{c_x} \\ my'' = F_y + J_{e_y} + J_{c_y} \\ mz'' = F_z + J_{e_z} + J_{c_z} \end{cases}$$

معادلات تفاضلية لحركة النقطة المادية M لحملة الاحداثيات المتحركة.

انتهت المحاضرة الرابعة عشر

بحال