المحاضرة السابعة:

لتكن X مجموعة غير منتهية ولتكن

$\tau = \{ \phi , B \; ; \; X \setminus B = B^c$ منتهية $\}$

لنبرهن أن τ توبولوجيا « تدعى توبولوجيا ذات المتممات المنتهية »

① $\phi \in \tau$ وكذلك $X \in \tau$ (لأن $X^c = \phi$ منتهية)

② بفرض $A, B \in \tau$ لنبرهن أن $A \cap B \in \tau$:

$A , B \in \tau \Longrightarrow$ منتهيات A^c , B^c

$\Longrightarrow (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ منتهية

$\Longrightarrow A \cap B \in \tau$

③ $A_i \in \tau \; (\forall i \in I)$

$\Longrightarrow$ منتهية $A_i^c \; (\forall i \in I)$

$\Longrightarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ منتهية

$\Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

ومما سبق τ توبولوجيا..

تعريف (النقطة الداخلية لمجموعة)

ليكن (X, τ) فضاء توبولوجي ولتكن $x \in A \subset X$

نقول بالتعريف إن x نقطة داخلية من A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة ($B \in \tau$) بحيث $x \in B \subset A$

سنرمز A° لمجموعة كل النقاط الداخلية في A، فيكون

$x \in A^\circ \iff (\exists \, B \in \tau : x \in B \subset A)$

$x \notin A^\circ \iff (\forall \, B \in \tau : B \not\subset A \;\;) \vee x \notin A$

مثال لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ ولتكن التبولوجيا
$\tau=\{\phi, X, \{a\}, \{a,c\}\}$

لنوجد $\{a\}^{\circ}$ ، $\{b\}^{\circ}$ ، $\{a,b,c\}^{\circ}$

إن المجموعات المفتوحة التي تحوي a هي:
$X, \{a\}, \{a,c\}$

إن المجموعات المفتوحة التي تحوي b هي: X

إن المجموعات المفتوحة التي تحوي c هي $X, \{a,c\}$

إن المجموعات المفتوحة التي تحوي d هي X

$A=\{a,b,c\}$ ولنوجد A°

هل $a\in A^{\circ}$؟ هل توجد $B\in\tau$ تحوي a بحيث $B\subset A$

نعم إن $\{a\}$ ، $\{a,c\}$ تحققان ذلك ومنه $a\in A^{\circ}$

هل $b\in A^{\circ}$؟ هل توجد $B\in\tau$ تحوي b بحيث $B\subset A$

لا توجد $B\in\tau$ بحيث $b\in B$ و $B\subset A$ ومنه

فإن $b\notin A^{\circ}$

هل $c\in A^{\circ}$؟ نعم لأن $c\in\{a,c\}\in\tau$ و $\{a,c\}\subset A$

ومنه $c\in A^{\circ}$ وبالتالي $A^{\circ}=\{a,b,c\}^{\circ}=\{a,c\}$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$\{a\}^{\circ}=\{a\}$ ، $\{b\}^{\circ}=\phi$

لا توجد أي مجموعة مفتوحة تحوي b ومحتواة في $\{b\}$

$\{b,c,d\}^{\circ}=\phi$ ، $\{b,a,d\}^{\circ}=\{a\}$

نتيجة: بفرض (X,τ) فضاء تبولوجي و $A \subset X$ عندئذ:

$A \in \tau \iff A = A^\circ$ (جميع نقاط A داخلية)

الإثبات ($\Leftarrow$) نفرض $A \in \tau$ ولنبرهن أن $A \subset A^\circ$

ليكن $x \in A$ عندئذ توجد $x \in B \in \tau$ بحيث $B \subset A$

نختار $B = A$ ويتم المطلوب

($\Rightarrow$) بفرض $A = A^\circ$ لنبرهن أن $A \in \tau$ (أي لنبرهن أن A مفتوحة)

$$\forall x \in A : \exists B_x \in \tau : x \in B_x \subset A$$

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$$

$$\Longrightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_x$$

A اجتماع مجموعات مفتوحة

ومنه فإن A مفتوحة $(A \in \tau)$

نقاط التجمع لمجموعة:

تعريف: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي، $A \subset X$ و $x \in X$

نقول بالتعريف إن x نقطة تجمع لـ A إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحوي x تتقاطع مع $A \setminus \{x\}$ ونرمز بـ A' لمجموعة كل النقاط الحدية (التجمع) للمجموعة A في (X,τ) أي

$$x \in A' \iff (\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow B \cap A \setminus \{x\} \neq \phi)$$

وبالتالي

$$x \notin A' \iff (\exists B \in \tau : x \in B \wedge B \cap A \setminus \{x\} = \phi)$$

$$\iff B \subset (A \cap \{x\}^c)^c = A^c \cup \{x\}$$

مثال لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ ولتكن التبولوجيا:

$\tau=\{\phi, X, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

أوجد $\{c,d\}'$ وظيفة $\{a,d\}'$ ، $\{b,c,d\}'$

الحل

x	المجموعات المفتوحة B حيث $x\in B$	$A\setminus\{x\}$	$B\cap A\setminus\{x\}$
a	$X, \{a\}, \{a,b,c\}$	$\{c,d\}$	$\{c,d\}, \phi, \ldots$
b	$X, \{b,c\}, \{a,b,c\}$	$\{c,d\}$	$\{c,d\}, \{c\}, \{c\}$
c	$X, \{b,c\}, \{a,b,c\}$	$\{d\}$	$\{d\}, \phi, \ldots$
d	X	$\{c\}$	$\{c\}$

ومنه فإن $\{c,d\}'=\{b,d\}$

المجموعة المغلقة ، تعريف

لتكن (X,τ) فضاء تبولوجي سنقول إن المجموعة $A\subset X$ مغلقة إذا وفقط إذا كانت متممتها مفتوحة أي :

$A\subset X$ مغلقة $\Longleftrightarrow$ $\tau\ni A^c=X\setminus A$

مثلاً في التبولوجيا السابقة المغلقات هي

$\phi, X, \{b,c,d\}, \{a,d\}, \{d\}$

وهناك مجموعات غير مغلقة وغير مفتوحة مثل $\{b\}$

أمثلة * في الفضاء $(X, P(X))$ المتقطع كل $A\subset X$ ستكون مفتوحة ومغلقة بآن واحد

* في $(X, \{\phi, X\})$ المجموعات المفتوحة هي ϕ, X فقط

، كذلك هي المغلقة فقط

نتائج في الفضاء التبولوجي (X,τ)

① X ، ϕ مغلقتين ... واضح.

② الاجتماع المنتهي لمغلقات هو مغلقة

الإثبات:

نفرض $A_1, \dots, A_n$ مغلقات في الفضاء التبولوجي (X,τ)

$$\Rightarrow A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c \in \tau \Rightarrow A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c \in \tau$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c \in \tau \Longrightarrow$$ مغلقة $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

③ التقاطع الكيفي لمغلقات هو مغلقة

الإثبات: لتكن A_i مغلقة في (X,τ) من أجل كل $i \in I$

عندئذ فإن:

$$\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c \quad ; \quad A_i^c \in \tau$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i^c \in \tau \Longrightarrow \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c \in \tau$$

$$\Longrightarrow$$ مغلقة $\bigcap_{i\in I} A_i$

انتهت المحاضرة السابعة