# نظرية الفئات

المحاضرة الأولى 10/3/2014 Mon

تعريف: نقول أنه توجد لدينا فئة $\mathcal{L}$ إذا كان لدينا:

① صف من الأشياء: نرمز له $ob(\mathcal{L})$ (object) هذه الأشياء تسمى عناصر الفئة (أشياء الفئة)

② نرمزها $A,B,C$ ، ونستخدم لغة المجموعات لأجلها : $A \in ob(\mathcal{L})$

هذا يعني أن $A$ أحد أشياء المجموعة الفئة $\mathcal{L}$

③ صف المورفيزمات:

أيا كان $A,B \in ob(\mathcal{L})$ يوجد $A \xrightarrow{u} B$ يسمى مورفيزم (سهم واحد على الأقل)

صف المورفيزمات يتألف من الأسهم $A \to B$ وذلك أيا كان $A,B \in ob(\mathcal{L})$

لنرمز لجميع الأسهم من $A$ إلى $B$ بالشكل $\mathcal{L}(A,B)$ حيث $\mathcal{L}(A,B)$ تشكل مجموعة..

ونرمز له $Mor(\mathcal{L})$

إن كلاً من صفي الأشياء والمورفيزمات يجب أن تحقق الشروط الآتية:

1- أيا كان $A,B,D \in ob(\mathcal{L})$ يوجد تطبيق:

$$\mu: \mathcal{L}(A,B) \times \mathcal{L}(B,D) \longrightarrow \mathcal{L}(A,D)$$

$$(v,u) \longmapsto u.v \qquad \left(A \xrightarrow{v} B \xrightarrow{u} D\right)$$

$$\mu((v,u)) = u.v \qquad u \circ v \text{ مقروء بالتتابع}$$

من أجل كل ثلاث أشياء يوجد عليه تركيب

ونسمي هذه العملية عملية تركيب المورفيزمات

الشرط الأول 1- هذه العملية تحقق أنها تجميعية:

$$\forall\, u \in \mathcal{L}(A,B)\ ,\ v \in \mathcal{L}(B,D)\ ,\ \lambda \in \mathcal{L}(D,K)$$

فإن:

$$\lambda(v.u) = (\lambda.v).u$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \arrow[d, "v"] \\ K & D \arrow[l, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

" الجداء الديكارتي للتعامل مع عنصرين لذلك نستخدم قانون التجميعية وذلك للتعامل مع 3 عناصر "

* قانون التجميعية: هو قانون للتعامل مع 3 عناصر.

عندما يكون منطلق التابع مجموعة واحدة فإننا نتعامل مع أي عنصر منها أما عندما يكون جداء ديكارتي فإننا نستطيع التعامل مع عنصرين معاً

الشرط الثاني: 2 - أياً كان $A \in ob(\mathcal{L})$ يوجد المورفيزم المطابق

$$I_A : A \longrightarrow A \in Mor(\mathcal{L})$$

ويحقق من أجل كل $\forall u : A \longrightarrow B \;,\; v : D \longrightarrow A$

فإن

$$I_A \cdot v = v$$

$$u \cdot I_A = u$$

«التطبيق المطابق يلعب دور العنصر الحيادي في مجموعة المورفيزمات»

الشرط الثالث: 3 - أياً كان $\forall A, B, A', B' \in ob(\mathcal{L})$

وكان $(A,B) \neq (A',B')$

فإن $\mathcal{L}(A,B) \cap \mathcal{L}(A',B') = \phi$

---

مثال على الفئات:

فئة المجموعات

نرمز لفئة المجموعات بالشكل Sets ..

1- أشياء هذه الفئة هي كل المجموعات

2- مورفيزمات هذه الفئة هي التطبيقات بين المجموعات

إذا كان $A, B \in ob(Sets)$ فإن:

مجموعة التطبيقات من A إلى B نرمز لها بالشكل $Hom(A,B)$

إضافة لذلك فإن عملية تركيب التطبيقات معرفة وتجميعية وتقبل محايد هو التطبيق المطابق وتحقق الشرط الأخير من التعريف.

إثبات أن $Hom(A,B)$ غير خالية: عن طريق وجود التطبيق الثابت وهو الذي يربط جميع عناصر A بعنصر واحد فقط مختار من B

---

## الفئة الجزئية

لتكن $\mathcal{L}$ فئة ..

نقول عن $\mathcal{L}'$ إنها تشكل فئة جزئية من الفئة $\mathcal{L}$ إذا تحققت

① $ob(\mathcal{L}') \subseteq ob(\mathcal{L})$

② $Mor(\mathcal{L}') \subseteq Mor(\mathcal{L})$

وأن المورفيزمات المطابقة في $\mathcal{L}'$ هي ذاتها المورفيزمات المطابقة في $\mathcal{L}$ ..

إضافة لذلك فإن تركيب المورفيزمات في $\mathcal{L}'$ هو ذاته تركيب المورفيزمات في $\mathcal{L}$ ..

«عدد التطبيقات (المورفيزمات) المطابقة يساوي عدد الأشياء لأن لكل شيء مورفيزم مطابق»

مثال: لسيناغشة تسمى فئة الزمرة ..

و لدينا فئة الزمر التبديلية على سبيل المثال ..

إن فئة الزمر التبديلية تشكل فئة جزئية من فئة الزمر ..

**الفئة الثنوية** لتكن $\mathcal{L}$ فئة .. (opposite)

الفئة الثنوية لـ $\mathcal{L}$ ونرمز لها $\mathcal{L}^{op}$ أو $\mathcal{L}^{\circ}$

تتألف من: 1 - أشياء الفئة الثنوية وهي ذاتها أشياء الفئة $\mathcal{L}$

2 - $\forall A, B \in ob(\mathcal{L}^{\circ})$

فإن: $\mathcal{L}^{\circ}(B, A) = \mathcal{L}(A, B)$

إضافة لذلك فإن جميع شروط الفئة محققة (وظيفة)

---

تعريف: لتكن $(\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ أسرة من الفئات .. نرمز لجداء هذه الأسرة: $\prod_{i\in I} \mathcal{L}_i$

والمؤلف من:

① جميع الأسطر الممكنة $(x_i)_{i\in I}$ حيث $\forall i \in I \; ; x_i \in ob(\mathcal{L}_i)$

أي $ob(\prod_{i\in I} \mathcal{L}_i)$ هي $(x_i)_{i\in I}$

② نفرض أن: $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in ob(\prod_{i\in I} \mathcal{L}_i)$

فإن المورفيزمات من $(x_i)_{i\in I}$ إلى $(y_i)_{i\in I}$

هي جميع الأسطر الممكنة: $(u_i : x_i \longrightarrow y_i)_{i\in I}$

((سطر .. كل مركبة فيه هي مورفيزم من $x_i$ إلى $y_i$))

(انشاء الله نعتني من أجل $I = \{1,2\}$ سيكون التعريف اليدوي ...)

انتهت المحاضرة



SABBAGH STATIONERY