تفاضلية بسم الله الرحمن الرحيم د. فنافف محمد

* (متسلسلة فوق هندسية) التابع فوق الهندسي $w = F(a, b, c, z)$

$$= 1 + \frac{a.b}{1!.c} z + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)2!} z^2 + \cdots$$

لو فرضنا c لا يساوي أي عدد صحيح وعوضنا $\lambda_2 = 1-c$ وسلكنا نفس الأسلوب

سنحصل على الحل الثاني لمعادلة غاوص $w_2 = z^{1-c}\, u$

أيضًا كان سنسلك أسلوب آخر

نجري التحويل،

c لا يساوي أي عدد «كي يكون الفرق بين الجذرين لا يساوي عدد صحيح»

$$w_2' = (1-c) z^{-c}.u + z^{1-c} u'$$

$$w_2'' = -c(1-c) z^{-c-1}.u + 2(1-c) z^{-c} u' + z^{1-c} u''$$

نعوض في المعادلة التفاضلية «معادلة غاوص»

$$z^2(z-1)u'' + z[2(1-c)(z-1) - c + (1+a+b)z]u' + \{(1-c)[-c(z-1) - c + (a+b+1)z] + a.b.z\}u = 0$$

بالإصلاح والاختصار على z

$$z(z-1)u'' + [(a+b+z-2c)z + c-2]u' + [(1-c)(1+a+b-c) + a.b]u = 0$$

وهذه المعادلة تشبه الشكل النموذجي لمعادلة غوص.

$$z(z-1)u'' + [-c + (1+a'+b')z]u + a'.b'.u = 0$$

وهو الشكل القانوني لمعادلة غوص

(1) $-1 + a' + b' = a+b+z-2c$

(2) $c - 2 = -c' \Rightarrow c' = 2-c$

(3) $a'.b' = (1-c)(1+a+b-c) + a.b$

$a' + b' = a+b+1+1-c-c$ من (1)

$= (a+1-c)(b+1-c)$

$a.b = (1-c)(1+a+b-c)$ من (3)

عددين حقيقين معا نا وجربت معا نا ومنه يكون $\Rightarrow$ $a' = 1+a-c$, $b' = 1+b-c$

$$u = F(a', b', c', z)$$

$$u = f(1+a-c, 1+b-c, 2-c, z)$$

$$u = \sum \frac{(1+a-c)k\,(1+b-c)k}{(2-c)k\ \ .k!} z^k$$

وبشرط أن $c$ لا تساوي أي عدد صحيح موجب أكبر أو يساوي الـ (2)

$$w_2 = z^{1-c} F(1+a-c, 1+b-c, 2-c, z) \ ;\ c \neq 2$$

$$w = A w_1 + B w_2$$

والحل العام هو الحل العام لمعادلة كوس في جوار الصفر حيث $w_1, w_2$ حلا مستقلا.

مثال:

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار الصفر:

$$z(z-1) w'' + (-3/2 + 4z) w' + 2w = 0$$

الـ معادلة كوس لأنه:

1- $0$، $1$، $\infty$ نقاط شاذة منتظمة

2- $c$ لا يساوي أي عدد صحيح.

وبالتالي نقارنها مع معادلة كوس

$$z(z-1) w'' + [-c + (1+a+b) z] w' + a.b.w = 0$$

وهو الشكل النموذجي لمعادلة كوس

$$\left.\begin{aligned} 1+a+b &= 4 \\ c &= 3/2 \\ a.b &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 1 \ \&\ b = 2$$

$$w_1 = F(a, b, c, z) = f(1, 2, 3/2, z)$$

$$w_2 = z^{1-c} f(1+a-c, 1+b-c, 2-c, z) = z^{-1/2} f(1/2, 3/2, 1/2, z)$$

where: $f(a,b,c,z) = \dfrac{\sum (a)_k \cdot b(k)}{(c)_k \cdot k!} z^k$

حلان مستقلان خطيا والحل العام يعطى بالشكل

$w = A_1 w_1 + B_2 w_2$

* مثال آخر .

$2z(1-z)w'' + (1-5z)w' - w = 0$

نقسم على (2)

$z(1-z)w'' + (\frac{1}{2} - \frac{5}{2}z)w' - w = 0$

وهي تطابق معادلة غوص

$z(1-z)w'' + [-c + (1+a+b)z]w' + a.b.w = 0$

$-z(1-z)w'' - [-c + (1+a+b)z]w' - a.b.w = 0$

$-c = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ $\quad a = 1$

$a+b = \frac{3}{2}$ , $a.b = \frac{1}{2}$ $\quad b = \frac{1}{2}$

$w_1 = F(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z) = \sum_{0}^{\infty} \dfrac{(1)_k (\frac{1}{2})_k}{(\frac{1}{2})_k \cdot k!} z^k = \sum z^k = \dfrac{1}{1-z}$

$w_2 = z^{1-c} f(1+a-c, 1+b-c, 2-c, z) ; \; z^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}, z)$

$w = A w_1 + B w_2$

$w_1 = f(a,b,c,z) = \sum \dfrac{(a)_k \cdot (b)_k}{(c)_k \cdot k!} z^k$

$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \cdots (\alpha+k-1)$

$(1)_k = 1.2.3 \cdots k!$

$(1)_k = k!$

$(\frac{1}{2})_k = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}+3) + \cdots + (\frac{1}{2}+k-1)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdots \frac{2k-1}{2}$

$= \dfrac{1.2.3.4.5 \cdots (2k-1)}{2^k}$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \cdots (2k-1)\,2k}{2^k\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \cdots 2k} = \frac{(2k)!}{(2)^k\, k!\,(2)^k} = \frac{(2k)!}{(2)^{2k}\, k!}$$

$$f(a,b,c,z) = \frac{d}{dz}\left[1 + \frac{a\cdot b}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\,2!} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\,3!} + \cdots\right]$$

$$= \left[\frac{a\cdot b}{2} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} z + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)\,2!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{a\cdot b}{2}\left[1 + \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)} z + \frac{(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}{2!\,c(c+1)} z^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{a\cdot b}{2} F((a+1),(b+1),(c+1),z)$$

مثال*

$$\frac{d}{dz}\left[z^{c-1} f(a,b,c,z)\right] = (c-1)\, z^{c-2} f(a,b,c-1,z)$$

الحل:

$$L_1 = \frac{d}{dz}\left[z^{c-1}\left(1 + \frac{a\cdot b}{c} z + \frac{a\cdot b(a+1)(b+1)}{2c(c+1)} z^2 + \frac{a\cdot b(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}{3\cdot 2c(c+1)(c+2)} z^3 \cdots\right)\right]$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{c-1} + \frac{a\cdot b}{2} z^c + \frac{a\cdot b(a+1)(b+1)}{2c(c+1)} z^{c+1} + \frac{a\cdot b(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}{3\cdot 2c(c+1)(c+2)} z^{c+2} + \cdots\right]$$

$$\left[(c-1) z^{c-2} + c\,\frac{a\cdot b}{c} z^{c-1} + \frac{(c+1)\,a\cdot b(a+1)(b+1)}{2c(c+1)} z^c + \frac{(c+2)\,a\cdot b(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}{3\cdot 2c(c+1)(c+2)} z^{c+1} + \cdots\right]$$

نخرج $(c-1)z^{c-2}$ عامل مشترك

$$L_1 = (c-1) z^{c-2}\left[1 + \frac{a\cdot b}{(c-1)} z + \frac{a\cdot b(a+1)(b+1)}{2(c-1)(c)} z^2 + \cdots\right]$$

$$= c-1\, z^{c-2} F(a,b,c-1,z) = L_2$$

مثال*

$$F(a,b,b,z) = (1-z)^{-a}$$

$$F(a,b,b,z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(b)_k\,k!}z^k$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!}z^k=1+az+\frac{a(a+1)}{2!}z^2+\cdots$$

$$=1+(-a)(-z)+\frac{-a(-a-1)}{2!}z^2+\cdots=(1-z)^{-a}$$

$$F(1,1,2,-z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(1)_k\,(1)_k}{(2)_k\,k!}(-z)^k=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

نثبت:

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{k!\quad k!}{k!\;\underset{(k+1)k!}{(k+1)!}}(1-z)^k=\sum\frac{(-1)}{(k+1)}z^k$$

$$z\,f(1,1,2,-z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)}z^{k+1}$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\frac{(-1)^k z^{k+1}}{k+1}+\cdots=\ln(1+z)$$

مثال:

$$\ln F\left(a,a,\tfrac{1}{2},\frac{-z^2}{4a^2}\right)=??$$

الحل:

تذكرة:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)_k=\frac{(2k)!}{2^k\,k!}$$

$$F\left(a,a,\tfrac{1}{2},\frac{-z^2}{4a^2}\right)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(a)_k(a)_k}{(\frac{1}{2})_k\,k!}\cdot\left(\frac{(-z)^2}{4a^2}\right)^k$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{(a)_k\,(a)_k\,(-1)^k}{(\frac{1}{2})_k\,k!\,4^k(a^2)^k}z^{2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,(a)_k\,(-1)^k}{\frac{(2k)!}{2^k\,k!}\,k!\,4^k\,(a^2)^k}z^{2k}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{(a)_k}{a^k}\right)^2$$

$\frac{(a)_k}{a^k}$ لسهيل نضاية

$$\frac{(a)_k}{a^k} = \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)}{\underbrace{a\,a\cdot a\cdots a}_{k\text{ مرة}}}$$

$$\lim \frac{(a)_k}{a^k} = 1$$

$$\lim F\left(a, a, \tfrac{1}{2}, \frac{-3^2}{4a^2}\right)$$

$$\lim \sum \frac{(-1)^k\, 3^{2k}}{2k!}\left(\frac{(a)_k}{a^k}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \cos 3$$

"انتهت المحاضرة"

yehia.D