المحاضرة الخامسة عشرة

الاثنين 12/5/2014

الموضوع: القياس الخارجي.

كل قياس هو قياس خارجي (تعريفاً)

ولكن العكس غير صحيح بالضرورة ولنأخذ مثال على ذلك:

مثال:

إذا كان $X \neq \phi$ نعرّف μ^* بالشكل:

$$\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \longmapsto \mu^*(A) = \sqrt{|A|}$$

حيث $|A|$ تمثل عدد عناصر A إذا كانت A منتهية والمطلوب:

أثبت أنّ μ^* يمثل قياس خارجي وأنه لا يمثل قياس.

الحل:

لنثبت صحة الشروط:

1) $\mu^*(\phi) = \sqrt{|\phi|} = 0$ محقق

2) $A \subseteq B \rightarrow |A| \leq |B| \rightarrow \sqrt{|A|} \leq \sqrt{|B|}$

$\rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ محقق

3) $\forall A_i \in P(X)$
$i \in \mathbb{N}$

لنثبت صحة:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

نلاحظ بداية أنّ:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$$

بالاستفادة من الخاصّة:

$$\sqrt{A+B} \leq \sqrt{A} + \sqrt{B}$$

وبالتالي:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sqrt{\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right|} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|A_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وبالتالي μ^* قياس خارجي.

لنأخذ الآن مثال على أن μ^* ليس قياس.

$$A = \{1, 2, \ldots, 9\} \rightarrow |A| = 9$$

$$B = \{10, \ldots, 25\} \rightarrow |B| = 16$$

لنبرهن على أن $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

$$\mu^*(A \cup B) = \sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu^*(A) = \sqrt{9} = 3 \\ \mu^*(B) = \sqrt{16} = 4 \end{array}\right\} \mu^*(A) + \mu^*(B) = 7$$

نلاحظ أن: $\mu^*(A \cup B) = 5 \neq 7 = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

وبالتالي μ^* ليس قياس.

ملاحظة: دوماً يمكن إنشاء قياس من قياس خارجي بحيث يكون مقصور القياس الخارجي بالنسبة للجبر التام هو قياس

$$\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \Rightarrow \mu^*\Big|_{\mathcal{A}} = \mu$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{A} = \{\phi, X\}$$

والعكس صحيح

- المجموعة المقيسة:

تعريف:

ليكن $\mu^*: P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ قياساً خارجياً ولتكن $A \subseteq P(X)$
عندئذٍ نقول عن A إنها قيوسة بالنسبة للقياس الخارجي μ
إذا تحقق الشرط :

$$\forall E \subseteq X \rightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

ملاحظة : ϕ و X مجموعتان قيوستان لأنه :

- $A = \phi$ فنجد :

$$\mu^*(E) = \underbrace{\mu^*(\phi)}_{=0} + \mu^*(E)$$

حسب تعريف μ^*

- $A = X$ فنجد :

$$\mu^*(E) = \mu^*(E) + \underbrace{\mu^*(\phi)}_{=0}$$

حسب تعريف القياس الخارجي .

مداخلة :

$$E = E \cap X$$
$$E = E \cap (A \cup A^c)$$
$$= (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$$

وهما مجموعتان منفصلتان

$$\rightarrow \mu(E) = \mu[(E \cap A) \cup (E \cap A^c)]$$

$$= \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$$ (حسب تعريف القياس)

- العلاقة بين القياس والقياس الخارجي :

$$\mu^*\big|_{m^*} = \mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu^*: P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ \quad\downarrow \\ \mu: m^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \end{array} \right.$$

انتهت المحاضرة الخامسة عشرة