السبت ٣/٥/٢٠١٤م

الثلاثاء ٢٢/٤/٢٠١٤م

" م ١٣ "

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (h,K)

• تفاضلات الدالة الحقيقية لعدة متغيرات:

تعريف: لتكن f دالة حقيقية ساحتها $D \subseteq \mathbb{R}^2$، ولتكن c نقطة داخلية في D أي $c(a,b) \in D^{\circ}$ (تعريف النقطة الداخلية)، عندئذٍ توجد كرة مفتوحة مركزها c نصف قطرها δ ومحتواة في D، لنفرض أن $h, K \in \mathbb{R}$ يحققان الشرط:

(1) $\|(h,K)\| = \sqrt{h^2+K^2} < \delta$ (h, K عددين حقيقيين)

فإذا وجد عددان A، B بحيث:

(2) $f(a+h, b+K) - f(a,b) = Ah + BK + \mathcal{N}\sqrt{h^2+K^2}$ * (تغير a، b)

$\mathbb{R}^2$

حيث $\mathcal{N}(h,K)$ دالة في K، h وتحقق الشرط:

(3) $\lim\limits_{(h,K) \to (0,0)} \mathcal{N}(h,K) = 0$

عندئذٍ: نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق

أو المفاضلة في النقطة: A، B لإيجاد A نفرض $\boxed{K = 0}$:

$f(a+h,b) - f(a,b) = Ah + \mathcal{N}h$ (نقسم الطرفين على h).

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = A + \lim_{h \to 0} \mathcal{N} \quad (=0)$$

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$ (هذا مشتقة جزئية بالنسبة للمتغير الأول x)

$$\boxed{A = f_x(a,b)}$$

بنفس الطريقة: نأخذ $h = 0$:

$B = f_y(a,b)$

نعوض بـ *

$f(a+h, b+K) - f(a,b) = \underbrace{f_x(a,b)}_{A} \cdot h + \underbrace{f_y}_{B} h + \mathcal{N}\sqrt{h^2+K^2}$

حيث $\lim\limits_{(h,K) \to (0,0)} \mathcal{N} = 0$

f قابلة للاشتقاق | f غير قابلة للاشتقاق لو مزدوج مع نهاية 0 ليست 0

وهو تعريف قابلية الاشتقاق في النقطة (a,b) أو تفاضل f في النقطة (a,b)

ملاحظة:

f قابل للاشتقاق أو المفاضلة في النقطة (a,b) عندئذ:

لـ f مشتقات جزئية f_x , f_y في النقطة (a,b).

أما وجود مشتقات جزئية لـ f ليس بالضرورة أن تكون f قابلة للاشتقاق.

---

* تعريف مشتقة فريشية:

لتكن الدالة الخطية التالية المعرفة بالشكل التالي:

$$d_{(a,b)} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(h,k) \longmapsto d_{(a,b)} f(h,k) = f_x(a,b).h + f_y(a,b).k$$

ملاحظة: صافي + ايتا

تسمى هذه الدالة تفاضل f في النقطة (a,b) أو مشتقة فريشية.

مثال (1): (ع دالة غير قابلة للاشتقاق)

لو مشتقة ح
ليس قابلة للاشتقاق

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

صح

قابل للاشتقاق

لازم نثبت أنه $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$

أثبت أن f غير قابلة للاشتقاق بالنقطة $(0,0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

هنا ما لازم شيء الصفر

$$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f_x(a,b)\, h + f_y(a,b).k + \eta \sqrt{h^2+k^2}$$

$$f(h,K)-f(0,0)=f_x(0,0)\cdot h+f_y(0,0)\cdot K+\eta\sqrt{h^2+K^2}$$

$$\frac{hK}{h^2+K^2}-0=\eta\sqrt{h^2+K^2}\implies \eta=\frac{hK}{(h^2+K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

سؤال $\boxed{h=K}$ بأخذ

$$\eta(h,K)=\frac{h^2}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{h^2}{2^{\frac{3}{2}}(h)^3}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}h}$$

$(2h^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\lim_{(h,K)\to(0,0)}\eta(h,K)=\infty\neq 0$$

لا تؤول النهاية (الميل) $\neq 0$ ⇐ غير قابل للاشتقاق (0,0)

⇐ f غير قابل للاشتقاق في $(0,0)$

مثال (2):

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$f(x,y)=x^2+2xy\quad,(a,b)\in\mathbb{R}^2$$

أثبت أن: ؟ الدالة قابلة للاشتقاق في نقطة (a,b).

لازم نوجد المشتقات الجزئية ونعوض.

$$f_x(x,y)=2x+2y$$
$$f_x(a,b)=2a+2b$$
$$f_y(x,y)=2x$$
$$f_y(a,b)=2a.$$

$$f(a+h,b+K)=a^2+h^2+2ah+2(a+h)(b+K)$$
$$=a^2+h^2+2ah+2ab+2aK+2hb+2hK$$
$$f(a,b)=a^2+2ab.$$

$$f(a+h,b+K)-f(a,b)=f_x(a,b)\cdot h+f_y(a,b)\cdot K+\eta\sqrt{h^2+K^2}$$

$$h^2+2ah+2aK+2hb+2hK=2ah+2bh+2aK+\eta\sqrt{h^2+K^2}$$

$$h^2 + 2hK = \eta\sqrt{h^2+K^2} \Longrightarrow \eta(h,K) = \frac{h^2+2hK}{\sqrt{h^2+K^2}}$$

سنعتبرها $f(x)$

نثبت أن $\lim\limits_{(h,K)\to(0,0)} \eta(h,K) = 0$ (A)

$0<\|x-x_0\|<\delta$, $|f(x)-A|<\varepsilon$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, 0<\|(h,K)\|<\delta \Longrightarrow \left|\frac{h^2+2hK}{\sqrt{h^2+K^2}} - 0\right| < \varepsilon\right)$$

(نقسم البسط على المقام)

$$\frac{h^2+2Kh}{\sqrt{h^2+K^2}} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2+K^2}} + \frac{2Kh}{\sqrt{h^2+K^2}} < \frac{h^2+K^2}{\sqrt{h^2+K^2}} + \frac{2hK}{\sqrt{h^2+K^2}}$$

ملاحظة

$$\frac{h^2+2Kh}{\sqrt{h^2+K^2}} < \sqrt{h^2+K^2} + \frac{2hK}{\sqrt{h^2+K^2}}$$

إن $\sqrt{h^2+K^2} > \frac{2hK}{\sqrt{h^2+K^2}}$ لأن :

$$0 < h^2 - 2Kh + K^2 = (h-K)^2 > 0$$

$$\frac{h^2+2hK}{\sqrt{h^2+K^2}} < \sqrt{h^2+K^2} + \sqrt{h^2+K^2}$$

من الفرض $0<\|h,K\|<\delta$

$$\frac{h^2+2hK}{\sqrt{h^2+K^2}} < 2\sqrt{h^2+K^2} < 2\delta \longrightarrow \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad 0<\|(h,K)\|<\delta \Longrightarrow$$

$$|\eta(h,K) - 0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{(h,K)\to(0,0)} \eta(h,K) = 0$$

#