/ /

- المحاضرة الخامسة عشر -

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى:

$$(1) .\ (y-z)^2 \cdot P + x \cdot z \cdot q = x \cdot y$$

الحل:

. نوجد الجملة الملحقة للمعادلة وهي:

$$\frac{dx}{(y-z)^2} = \frac{dy}{x \cdot z} = \frac{dz}{x \cdot y}$$

$$① \qquad ② \qquad ③$$

. من ② و ③:

$$\frac{dy}{x \cdot z} = \frac{dz}{x \cdot y} \Rightarrow \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

$$y \cdot dy = +z \cdot dz \Rightarrow y \cdot dy - z \cdot dz = 0$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = c_1' \Rightarrow y^2 - z^2 = c_1$$

. نطرح النسبة ③ من ② ونساويها بالنسبة ①:

$$② - ③ = \frac{dy - dz}{x \cdot z - x \cdot y}$$

$$② - ③ = ④ \Longrightarrow \frac{d(y-z)}{-x(-z+y)} = \frac{dx}{(y-z)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(y-z)^2 \cdot d(y-z)}{(y-z)} = -x \cdot dx$$

$$(y-z) \cdot d(y-z) + x \cdot dx = 0$$

$$\frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{x^2}{2} = c_2' \Rightarrow c_2 = (y-z)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow F(u, v) = 0 \Rightarrow F(c_1, c_2) = 0$$

$$\Rightarrow F(y^2-z^2, (y-z)^2+x^2)=0$$ وهو الحل العام.

(2). $P.\sin^2 x + q\, tg\, z = \cos^2 . z$

الحل:

- لنوجد الجملة الملحقة:

$$\underset{①}{\frac{dx}{\sin^2 x}} = \underset{②}{\frac{dy}{tg\, z}} = \underset{③}{\frac{dz}{\cos^2 z}}$$

من ② و ③:

$$\frac{dy}{tg\, z} = \frac{dz}{\cos^2 z} \Rightarrow dy = \frac{tg\, z}{\cos^2 z} dz$$

تذكرة $\boxed{(tg\, z)' = 1 + tg^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} y = \frac{1}{2} tg^2 z + c_1$

$$c_1 = y - \frac{1}{2} tg^2 z$$

من ① و ②:

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

تذكرة: $\boxed{(\cot g\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$

بالمكاملة:

$$-\cot g\, x = tg\, z + c_2'$$

$$c_2' = -\cot g\, x - tg\, z$$

$$\Rightarrow c_2 = \cot g\, x + tg\, z$$

ومنه الحل العام هو:

$$F(u, v) = 0$$

$$F(c_1, c_2) = 0$$

$$F(y - 1/2\, tg^2 z, \cot g\, z + tg\, z) = 0$$

انتهت المحاضرة الخامسة عشر