المحاضرة الثالثة عشرة — الخميس 8/5/2014

الموضوع: المدخل إلى نظرية القياس.

1) مفاهيم في نظرية المجموعات.

2) مفاهيم في الطوبولوجيا.

3) مقدمة في نظرية القياس.

1) مفاهيم في نظرية المجموعات:

- المجموعة - طرائق التعبير عنها
  - ← القائمة
  - ← القاعدة
  - ← مخططات فن

مثال.

- أهم العلاقات بين العناصر والمجموعات:

$$\in, \notin, \subseteq, \nsubseteq, \subset, \not\subset, =$$

علاقة انتماء عنصر لمجموعة

علاقة احتواء مجموعة لمجموعة

- المجموعات الشهيرة:

* الخالية: $\phi = \{\ \}$
  - ← الخالية وحيدة
  - ← الخالية محتواة في أي مجموعة.

* الشاملة (الكلية) نسبياً: X ، Ω

- قدرة مجموعة.

- مجموعات الأعداد

- $\mathbb{N}$ (مجموعة الأعداد الطبيعية): مغلقة فقط بالنسبة للجمع والضرب وهي مجموعة غير منتهية لا تحوي هنا الصفر.

- $\mathbb{W}$ (مجموعة الأعداد الطبيعية مع الصفر): لها نفس خواص $\mathbb{N}$.

- $\mathbb{Z}$ (مجموعة الأعداد الصحيحة): مغلقة للعمليات جميعها عدا عملية القسمة وهي مجموعة غير منتهية ولكنها معدودة [ونعني بكلمة معدودة أنه يوجد تقابل بين عناصرها وعناصر مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ونقصد أيضاً بمعدودة أنه يمكننا أن نقوم بعد عناصرها أي معرفة ما يسبق كل عدد وما يليه ولكننا غير قادرين على معرفة عدد هذه العناصر كونها مجموعة غير منتهية]

- Q (مجموعة الأعداد العادية): مغلقة لجميع العمليات عدا القسمة ، لو أنها لم تحوي الصفر لكانت مغلقة لكل العمليات ، وهي مجموعة غير منتهية ، لكنها قابلة للعد.
- R (مجموعة الأعداد الحقيقية): إن هذه المجموعة مغلقة لكافة العمليات المعرفة عليها ، وهي مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد.
- C (مجموعة الأعداد العقدية): وهي مجموعة مغلقة بالنسبة لكافة العمليات وغير منتهية وغير معدودة.

- مجموعة القوة لمجموعة: وهي مجموعة جميع أجزاء مجموعة ونرمز لها $P(X)$ حيث X مجموعة

ملحوظة: $|P(X)| = 2^{|X|}$

- العمليات على المجموعات والعلاقات فيما بينها:

متم → $\cup, \cap, \Delta, \setminus, C$

اجتماع ، تقاطع ، تناظري ، فرق

$\cap$: $A \cap B = B \cap A$ (التقاطع تبديلي)

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (التقاطع تجميعي)

$A \cap X = A$ (X حيادي التقاطع)

$A \cap \phi = \phi$ (ϕ ماص التقاطع)

$\cup$: $A \cup A^c = X$, $A \cup B = B \cup A$,

$A \cap A^c = \phi$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cup \phi = A$, $A \cup X = X$

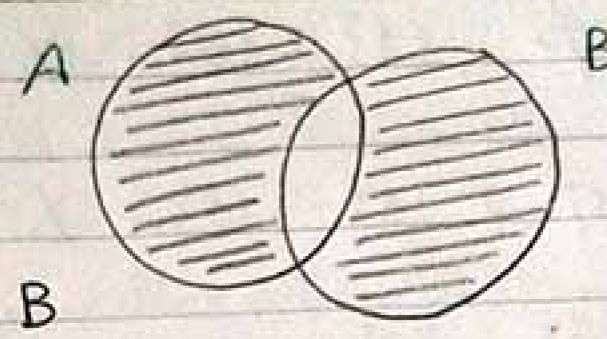
Δ: (الفرق التناظري):

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$A \Delta B = B \Delta A$

$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

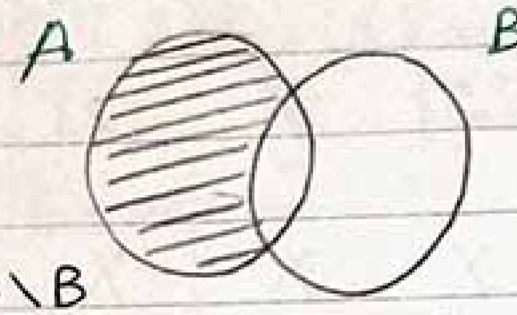


$A \Delta B$

$\setminus$: (الفرق) $A \setminus B \neq B \setminus A$

$(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

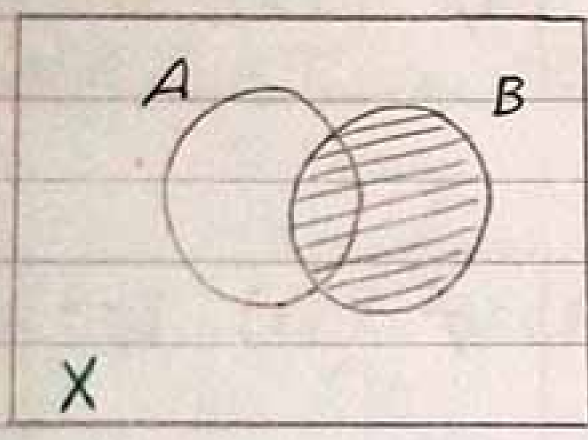
$A \setminus B = A \cap B^c$



$A \setminus B$

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

$A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$



c : *Complement* (المتمم)

$\phi^c = X \quad , \quad X^c = \phi$

$$\left.\begin{array}{l}(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c\end{array}\right\}$$ قانوني دي مورغان

$(A^c)^c = A$

مثال : إذا كانت $X = \{1, 2\}$ فأثبت أن $P(X)$ مغلقة بالنسبة لجميع العمليات :

الحل :

$P(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, X\}$

$\cup$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	X
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	X
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	X	X
$\{2\}$	$\{2\}$	X	$\{2\}$	X
X	X	X	X	X

$\cap$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	X
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{1\}$	ϕ	$\{1\}$	ϕ	$\{1\}$
$\{2\}$	ϕ	ϕ	$\{2\}$	$\{2\}$
X	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	X

Δ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	X
ϕ	ϕ			
$\{1\}$				
$\{2\}$				
X				

$\setminus$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	X
ϕ				
$\{1\}$				
$\{2\}$				
X				

$\boxed{2}$ مفاهيم طبولوجية :

تعريف : لتكن لدينا $\phi \neq X$ ولتكن τ صف من أجزاء X ، نقول عن τ إنه تمثل طبولوجيا إذا تحققت الشروط :

1) $\phi , X \in \tau$

2) $\forall A, B \in \tau \rightarrow A \cup B \in \tau \ , A \cap B \in \tau$

3) $\forall A_i \ _{i \in I} \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

تعريف: ندعو عناصر الطبولوجيا بالمجموعات المفتوحة

مقدمة في نظرية القياس:

- تعريف الحلقة: ليكن $X \neq \phi$ ولتكن τ صف من أجزاء X، نقول عن τ أنه حلقة إذا تحققت الشروط:

1) $\phi \in \tau$

2) $\forall A, B \in \tau \rightarrow A \cup B \in \tau \ , A \setminus B \in \tau$

ملاحظات:

1) $A \Delta B = \underbrace{\underset{\in \tau}{(A \setminus B)} \cup \underset{\in \tau}{(B \setminus A)}}_{\in \tau} \Rightarrow A \Delta B \in \tau$

← الحلقة مغلقة بالنسبة لـ Δ.

2) $A \cap B = \underbrace{\underset{\in \tau}{(A \cup B)} \setminus \underset{\in \tau}{(A \Delta B)}}_{\in \tau} \Rightarrow A \cap B \in \tau$

← الحلقة مغلقة بالنسبة لـ $\cap$.

3) مثال معاكس عن المتمم: $X = \{1, 2, 3\}$

$\tau = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

نلاحظ أنه:

$\{1\}^c = \{2, 3\} \notin \tau$

وبالتالي الحلقة غير مغلقة بالنسبة للمتممة.

• تعريف الحلقة التامة :
هي حلقة ولكنها مغلقة بالنسبة للاتحاد المعدود أي :

$$\forall_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \tau \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$$

تعريف الحلقة الأصغرية المولدة بالصف $\mathcal{D}$:
هي أصغر حلقة تحوي $\mathcal{D}$ أي أن τ حلقة أصغرية مولدة بالصف $\mathcal{D}$ إذا كانت τ_i حلقات تحوي $\mathcal{D}$ فإن :

$$\mathcal{D} \subseteq \tau \subseteq \tau_i$$

مثال : إذا كانت $X=\{1,2,3,4\}$ وكان $\mathcal{D}=\{\{1,2\},\{3\}\}$
والمطلوب :
أوجد أصغر حلقة تحوي $\mathcal{D}$.
الحل : $\tau=\{\phi,\{1,2\},\{3\},\{1,2,3\}\}$
وهي الحلقة الأصغرية المطلوبة.

الجبر : لتكن $X\neq\phi$ وليكن $\mathcal{A}$ صفاً من أجزاء X.
نقول عن $\mathcal{A}$ إنه جبر إذا حققت الشروط التالية :

1) $\phi, X \in \mathcal{A}$
2) $\forall A,B \in \mathcal{A} : A\cup B \in \mathcal{A}\ ,\ A\setminus B \in \mathcal{A}$

أي أن الجبر هو عبارة عن حلقة تكون X هي عنصر من عناصرها.

ملاحظات :
1- الجبر مغلق بالنسبة للتقاطع.
2- الجبر مغلق بالنسبة لـ Δ
3- $A\in\mathcal{A}\ ,\ X\in\mathcal{A}\ ,\ X\setminus A \in \mathcal{A} \rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
وبالتالي الجبر مغلق بالنسبة للمتمم.

وعليه فإنَّ الجبر مغلق بالنسبة لجميع العمليات.

4- إذا كان $X \neq \phi$ فإنَّ:

1) $\mathcal{A} = \{\phi, X\}$ يمثل جبراً

2) $P(X)$ يمثل جبراً

3) $\mathcal{A} = \{\phi, A, A^c, X\}$ يمثل جبراً

تعريف آخر للجبر مكافئ للتعريف السابق:

ليكن $X \neq \phi$ ، $\mathcal{A}$ صفاً من أجزاء X عندئذٍ نقول عن $\mathcal{A}$ إنَّها تمثل جبراً إذا تحققت الشروط:

1) $\phi \in \mathcal{A}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \to A \cup B \in \mathcal{A}$

3) $\forall A \in \mathcal{A} \to A^c \in \mathcal{A}$

من ③ نستنتج أنَّ: $X \in \mathcal{A}$.

ونستنتج أيضاً أنَّ: لدينا:

$$A, A^c, B \in \mathcal{A} \to \underbrace{(A^c \cup B)^c}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \to \underbrace{A \cap B^c}_{\in \mathcal{A}} = A \setminus B$$

مثال: إذا كانت $X = \{a, b, c, d\}$ وكان $\mathcal{D}$ صفاً من أجزاء X معرّفاً كما يلي:

$$\mathcal{D} = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

والمطلوب:

1) هل $\mathcal{D}$ يمثل حلقة؟ ولماذا؟

2) هل $\mathcal{D}$ يمثل طبولوجيا؟ ولماذا؟

3) أوجد أصغر حلقة تحوي $\mathcal{D}$ {مولّدة من $\mathcal{D}$}

4) أوجد أصغر جبر يحوي $\mathcal{D}$.

5) أوجد أصغر طبولوجيا تحوي $\mathcal{D}$.

6) أوجد أصغر جبر من أجزاء X.

7) أوجد أكبر جبر من أجزاء X.

انتهت المحاضرة الثالثة عشرة