المحاضرة ١٤ 12/5/2014

مبرهنة ليكن $\mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2$ فئتين

$F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ ، $G : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1$ دوال مباشرة

لأجل كل مورفيزم دالي: Φ $\cancel{\delta_\Phi} : I_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G.F$

يوجد مورفيزم دالي

$$\delta_\Phi : Hom_{\mathcal{L}_2}(F) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_1}(G)$$

الإثبات بما أن F ، G دوال مباشرة ، فإنه توجد الدوال:

$$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(A,B) = \mathcal{L}_1(A, G(B))$$
$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A,B) = \mathcal{L}_2(F(A), B)$$

وذلك $\forall (A,B) \in \mathcal{L}_1^\circ \times \mathcal{L}_2$

لنعرف $\delta_\Phi : Hom_{\mathcal{L}_2}(F) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_1}(G)$

بالشكل الآتي: $\forall (A,B) \in \mathcal{L}_1^\circ \times \mathcal{L}_2$

$$\delta_\Phi(A,B) : Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(A,B)$$
$$: \mathcal{L}_2(F(A), B) \longrightarrow \mathcal{L}_1(A, G(B))$$

لأجل: $u : F(A) \longrightarrow B \in \mathcal{L}_2(F(A), B)$

نضع $\boxed{\delta_\Phi(A,B)(u) = G(u) . \Phi(A) \in \mathcal{L}_1(A, G(B))}$

ليكن $(\mu, \nu) \in Mor(\mathcal{L}_1^\circ \times \mathcal{L}_2)$ ، عندئذ:

$$(\mu, \nu) : (A,B) \longrightarrow (A_1, B_1)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_1^\circ & \times & \mathcal{L}_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ (A & , & B) \\ \uparrow \mu & & \uparrow \nu \\ (A_1 & , & B_1) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A,B) \arrow[r, "\delta_\Phi(A,B)"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(\mu,\nu)"'] & Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(A,B) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(\mu,\nu)"] \\
Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A_1,B_1) \arrow[r, "\delta_\Phi(A_1,B_1)"] & Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(A_1,B_1)
\end{tikzcd}$$

نريد برهان أن هذا المخطط تبديلي..

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathcal{F}_2(F(A),B)} \arrow[r, "S_\Phi(A,B)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_1}(F(\mu),\nu)"'] & \mathcal{F}_1(A,G(B)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_1}(\mu,G(\nu))"'] \\
\mathcal{F}_2(F(A_1),B_1) \arrow[r, "S_\Phi(A_1,B_1)"] & \mathcal{F}_1(A_1,G(B_1))
\end{tikzcd}$$

لنبرهن على أن:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_1}(\mu,G(\nu)) . S_\Phi(A,B) = S_\Phi(A_1,B_1) . \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_2}(F(\mu),\nu)$$

ليكن $\lambda : F(A) \to B \in \mathcal{F}_2(F(A),B)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_1}(\mu,G(\nu)) . S_\Phi(A,B)(\lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_1}(\mu,G(\nu))\big(\underbrace{G(\lambda) . \Phi(A)}_{u}\big)$$
$$= G(\nu).\big(G(\lambda).\Phi(A)\big).\mu$$
$$= G(\nu.\lambda).\boxed{\Phi(A).\mu}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(G)(f_2.f_1)(u) \\ = G(f_2).f_1\end{array}}$$

$$S_\Phi(A_1,B_1) . \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_2}(F(\mu).\nu)(\lambda) = S_\Phi(A_1,B_1)\big(\nu.\lambda.F(\mu)\big)$$
$$= G(\nu.\lambda.F(\mu)).\Phi(A_1)$$
$$= G(\nu.\lambda).\boxed{G(F(\mu)).\Phi(A_1)}$$

بما أن $\Phi : I_{\mathcal{F}_1} \to G.F$ مورفيزم دالي

فإن المخطط الآتي تبديلي:

$\mu : A \to A_1$

$\mathcal{F}_1$ في

$\mu : A_1 \to A$

$\mathcal{F}_1$ في

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\Phi(A_1)"] \arrow[d, "\mu"'] & G.F(A_1) \arrow[d, "G.F(\mu)"] \\
A \arrow[r, "\Phi(A)"] & G.F(A)
\end{tikzcd}$$

أي أن: $\boxed{G.F(\mu).\Phi(A_1) = \Phi(A).\mu}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_1}(\mu,G(\nu)) . S_\Phi(A,B)(\lambda) = G(\nu.\lambda).GF(\mu).\Phi(A_1) =$$
$$S_\Phi(A_1,B_1).\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_2}(F(\mu).\nu)(\lambda)$$

ومنه فالمخطط تبديلي

التعاريف والوظائف مطالبين فيها كاملة وتم حذف المبرهنة بنهاية المحاضرة 6 وبداية 7