/ /

المحاضرة الثانية عشرة

- درسنا سابقاً منشأ المعادلات التفاضلية في حال كانت الوسطاء هي ثوابت كيفية ولنأخذ أمثلة على ذلك.

- مثال على الحالة (أ):

أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية (م.ت.ج.) للعلاقة:

$$z = c \cdot x \cdot y \quad \text{---} \quad (1)$$

الحل:

- نشتق بالنسبة لـ: x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = c \cdot y$$

$$\Rightarrow p = c \cdot y \Rightarrow c = p/y$$

- نعوض في (1): $\boxed{z = x \cdot p}$ --- (2) وهي: (م.ت.ج.م).

- نشتق بالنسبة لـ: y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = c \cdot x$$

$$\Rightarrow q = c \cdot x \Rightarrow c = q/x$$

- نعوض في (1): $\boxed{z = y \cdot q}$ --- (3) وهي: (م.ت.ج.م)

- من (2) و (3) نجد: $\boxed{p \cdot x = q \cdot y}$ وهي: (م.ت.ج.م)

مثال على الحالة (ب): أوجد: (م.ت.ج) للعلاقة:

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2=1 \quad \text{--- } (1)$$

الحل:

- نشتق (1) بالنسبة لـ: x:

$$2(x-c_1)+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$2(x-c_1)+2z\cdot P=0 \Rightarrow x-c_1=-z\cdot P \quad \text{--- } (2)$$

- نشتق (1) بالنسبة لـ: y:

$$2(y-c_2)+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$2(y-c_2)+2\cdot z\cdot q=0 \Rightarrow y-c_2=-z\cdot q \quad \text{--- } (3)$$

- نعوض (2) و (3) في (1):

$$(-z P)^2+(-z\cdot q)^2+z^2=1$$

$$z^2\cdot P^2+z^2\cdot q^2+z^2=1 \Rightarrow \boxed{z^2(P^2+q^2+1)=1}$$

(م.ت.ج.م)

مثال على الحالة (2): أوجد (م.ت.ج) للعلاقة:

$$ax+by+cz=1$$

الحل:

- نشتق بالنسبة لـ: x:

$$a+c\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\boxed{a+c\cdot P=0} \quad \text{--- } (1)$$

- نشتق بالنسبة لـ: y:

$$b+c\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\boxed{b+c\cdot q=0} \quad \text{--- } (2)$$

/ /

من ① نشتق بالنسبة لـ x :

ولكن: $c \neq 0$ من العلاقة المعطاة ، $C \cdot r = 0 \Rightarrow r = 0$.

من ① نشتق بالنسبة لـ y :

$$C \cdot S = 0 \Rightarrow S = 0$$

من ② نشتق بالنسبة لـ x :

$$C \cdot S = 0 \Rightarrow S = 0$$

من ② نشتق بالنسبة لـ y :

$$C \cdot t = 0 \Rightarrow t = 0$$

إذن : $r = 0$ ، $S = 0$ ، $t = 0$ معادلات تفاضلية جزئية .

وبذلك : أنهينا دراسة الحالة الأولى عندما تكون الوسطاء ثوابت.

ثانياً : الوسطاء هي دوال اختيارية :

أ- إذا كانت العلاقة الجبرية تحوي على دالة اختيارية واحدة تتعلق بدالة معلومة من الشكل :

$$F(x, y, z, g(u(x,y,z)))$$

حيث : $z = z(x,y)$ و g دالة اختيارية ، F ، u دالتان معلومتان

عندئذٍ : نشتق بالنسبة لـ : x ونشتق بالنسبة لـ : y ونحذف الدالة الاختيارية من العلاقات .

مثال: أوجد م.ت.ج للعلاقة : $x^2+y^2+z^2 = g(2x+y)$

ـ نشتق بالنسبة لـ : x :
$$2x+2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

نفرض أن : $u = 2x+y$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot g'(u)$$

- تحول الاشتقاق الجزئي إلى كلي لأنّ g تابع لـ: u فقط.

$$2x + 2z.p = 2g'(u) \quad --- (1)$$

- نشتق بالنسبة لـ: y:

$$2y + 2z.\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dg}{du}.\frac{\partial u}{\partial y} = g'(u)$$

$$2y + 2z.q = g'(u) \quad --- (2)$$

نقسم (1) على (2) ونطرح:

$$2y - x + 2z.q - z.p = 0$$

$$2y - x + (2q - p).z = 0$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى.

- انتهت المحاضرة الثانية عشرة -