E- Mail: Mimozeyn@yahoo.com

30 /3 /2013-2014

* تتمة إثبات المبرهنة السابقة :

٣ ⟸ ١ :

لنفرض أن $(M,\preccurlyeq)$ تحقق شرط انقطاع السلسلة المتناقصة ، ولنفرض جدلاً أن M لا تحقق شرط الأصغرية عندئذٍ توجد في M مجموعة غير خالية جزئية مثل N بحيث لا تملك N أي عنصر أصغري ومن هنا نحصل على المتتالية $\{a_n\}$ التي يتم تشكيلها كما يلي بالاستفادة من موضوعة الاختيار :

- لنأخذ a_0 عنصراً يتم اختياره من N بحسب موضوعة الاختيار

(الآن بما أن N لا تملك أي عنصر أصغري فإن a_0 ليس أصغري وبالتالي توجد في N عناصر أصغر منه)

- ثم نفرض N_1 هي مجموعة تلك العناصر من N التي كل منها أصغر من a_0

- فتكون $N_1 \neq \emptyset$ وبالتالي نختار a_1 من N_1

- لنفرض أننا قد بنينا العناصر $a_0, a_1, a_2, \dots\dots, a_t, \dots\dots$

عندها نختار a_{t+1} كما يلي : (بالبناء الاستقرائي)

إن a_t ليس عنصر أصغري في N وبالتالي يوجد في N عنصر أصغر منه ، وبالتالي فمجموعة العناصر من N التي تكون أصغر من a_t تكون غير خالية فنختار منها عنصراً a_{t+1}

- ومنه يمكننا أن نقول أننا قد حصلنا على السلسلة المتناقصة الآتية :

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots\dots > a_t > a_{t+1} > \dots\dots$$

والتي لا تنقطع بتاتاً (لأنه لا يوجد في N أي عنصر أصغري)

ما ينا قض كون M تحقق شرط انقطاع السلسلة المتناقصة

إذاً : الفرض الجدلي خاطئ ومنه M تحقق الشرط الأصغري .

ملاحظة :

- عملية صياغة الإثبات هامة جداً ونحاسب عليها في الامتحان

- من الآن فصاعداً أي شرط من شروط المبرهنة السابقة يمكننا إثبات تحققه عن طريق إثبات أي من الشروط الأخرى المكافئة له .

* تعاريف

1- لتكن $(A,\leqslant)$ مجموعة مرتبة وفق $\leqslant$ ، ولتكن $\tilde{A}$ أسرة جميع المجموعات الجزئية من A والتي كل منها مرتبة كلياً في A وفق $\leqslant$ ، عندئذٍ يقال عن العنصر الأعظمي (في حالة وجوده) في $\tilde{A}$ إنه "سلسلة عظمى في A".

2- لتكن $(A,\leqslant)$ مجموعة مرتبة جيداً (مرتبة كلياً وتحقق الشرط الأصغري) عندئذٍ يقال عن المجموعة الجزئية H من A إنها "قطعة من A" إذا وفقط إذا تحقق ما يلي : $\forall b\in H,\ \forall a\in A\ ;\ a\leqslant b\ :\ a\in H$

أي كان $b\in H$ وأياً كان $a\in A$ بحيث $a\leqslant b$ فإن $a\in H$.

(أي أن كل عناصر A التي هي أصغر أو تساوي أي عنصر من H يجب أن تنتمي إلى H)

3- لتكن $(A,\leqslant)$ مجموعة مرتبة جيداً ، وليكن $a\in A$ ، ولتكن المجموعة :

$$H=\{x\ /\ x\in A,\ x<a\}$$

عندئذٍ تكون H قطعة من A.

الإثبات :

نلاحظ أولاً أن $H\subseteq A$

وليكن $b\in H$ و $x\in A$ بحيث $x\leqslant b$ عندئذٍ فإن :

$\underbrace{b\in A,\ b<a}$ و $x\in A$ و $\underbrace{x\leqslant b}$

ومنه $x\in A$ و $x<a$ وبالتالي $x\in H$ إذاً H قطعة من A.

* إن هذه القطعة H تكون محتواة تماماً في A.

* سنبرهن الآن أن كل قطعة من A محتواة تماماً فيها فإننا نكتب بالشكل $\{x \mid x\in A,\ x<a\}$ وذلك كالتالي :

لتكن K قطعة من A (أو في A) بحيث $K \subsetneq A$ عندئذٍ $\emptyset \neq A-K \subset A$

وبالتالي يوجد في $A-K$ عنصر أصغر (لأن الترتيب كلي) لأن $K\subsetneq A$ وسنرمز لهذا العنصر بالرمز a مثلاً

((ملاحظة جانبية : بما أن $(A,\leq)$ مرتبة جيد أ فهي إذاً :

أ- تحقق الشرط الأصغري ← ومنه يوجد في $A-K$ عنصر أصغري } إذاً a عنصر

ب- مرتبة كلياً ← ومنه كل عنصر أصغري هو عنصر أصغر } أصغري في $A-K$))

- وسنبرهن أن : $K=\{x \mid x\in A,\ x<a\}$

البرهان :

• الاحتواء الأول $\supseteq$:

ليكن $x\in\{x \mid x\in A, x<a\}$ عندئذٍ $x\in A$ ، $x<a$

لنفرض مؤقتاً أن $\boxed{x\notin K}$ عندئذٍ فإن $x\in A-K$

ولما كان a عنصراً أصغر في $A-K$ فإننا نستنتج أن $a\leq x$ ما يناقض كون $x<a$

إذاً الفرض الجدلي خاطئ ومنه $a\in K$

وبالتالي الاحتواء الأول محقق : $K\supseteq\{x \mid x\in A,\ x<a\}$ (I)

• الاحتواء الثاني $\subseteq$:

ليكن $y\in K$ عندئذٍ $y\in A$ (لأن $K\subsetneq A$)

ثم لنفرض مؤقتاً أن $a\leq y$ (أي أن $y\notin\{x \mid x\in A, x<a\}$)

- وبالتالي باعتبار K قطعة من A و $y\in K$ وحيث $a\leq y$ (حيث $a\in A$)

نستنتج أن $a\in K$ وهذا يناقض كون : $a\in A-K$

إذاً الفرض الجدلي خاطئ ومنه $y<a$ إذاً $y\in\{x\in A, x<a\}$ والاحتواء الثاني (II) محقق.

من (I) و (II) نجد أن المساواة محققة.

* يدعى a بالتعريف : العنصر المُعيِّن للقطعة K المحتواة تماماً في المجموعة المرتبة جيداً : $(A, \leq)$.

نتيجة :

كل قطعة محتواة تماماً في مجموعة مرتبة جيداً $(A, \leq)$ فإنها تتعين بأصغر عنصر (العنصر الأصغر) في متممها في A .

- المجموعة الخالية هي قطعة في أي مجموعة مرتبة جيداً .

نتيجة : القطعة الخالية في المجموعة المرتبة جيداً تتعين بالعنصر الأصغر في هذه المجموعة المرتبة جيداً .

- A تعتبر قطعة في نفسها ، لكن هنا لا يمكن تحديدها بعنصر معين لأنها ليست محتواة تماماً في نفسها .

* نص موضوعة الاختيار

لتكن M مجموعة ما ، عندئذٍ يوجد تطبيق مثل :

$$\Phi : S(M) - \{\emptyset\} \longrightarrow M$$

أسرة المجموعات الجزئية من M ماعدا الخالية

$$A \longmapsto \Phi(A) \in A$$

(هو تربط كل مجموعة جزئية A من M بعنصر $\Phi(A)$ من هذه المجموعة الجزئية A)

* نص مبرهنة زرملو

يمكن تعريف علاقة ترتيب على أية مجموعة بحيث تصبح هذه المجموعة مرتبة جيداً وفقها .

* مبرهنة :

موضوعة الاختيار $\xLeftarrow{\text{تقتضي}}$ مبرهنة زرملو

الإثبات :

لنفرض أن موضوعة الاختيار محققة (صحيحة) ولنثبت على صحة مبرهنة زرملو وذلك كمايلي :

لتكن M مجموعة ما، عندئذٍ:

- إذا كانت $M=\emptyset$ يتم المطلوب (وإثبات ذلك عن طريق نقض الفرض)

- لذا سنفترض أن $M\neq\emptyset$ (سنعرف علاقة ترتيب ثم نتحقق من المطلوب)

ولنأخذ التعريف الآتي:

يقال عن مجموعة جزئية من M مثل A إنها مُميَّزة في M إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أ- $A\neq\emptyset$

٢- يمكن تعريف علاقة ترتيب على A بحيث تصبح مرتبة جيداً وفقها

٣- أياً كان a من A فإن $a=\Phi(M-A')$ حيث A' هي قطعة من A (المرتبة جيداً) تتعين بالعنصر a حيث Φ هو التطبيق الموجود حسب موضوعة الاختيار

$$\Phi: S(M)-\{\emptyset\} \longrightarrow M$$

$$A \longmapsto \Phi(A)\in A$$

مثال: إن المجموعات المميزة في M موجودة (واحدة على الأقل) بملاحظة ما يلي:

(أولاً حيث $M\in S(M)-\{\emptyset\}$ فإن $\Phi(M)\in M$)

إن المجموعة الجزئية $\{\Phi(M)\}$ (وحيدة العنصر) هي مجموعة مميزة في M للأسباب التالية:

أ) هذه المجموعة $\{\Phi(M)\}$ غير خالية.

٢) يمكن تعريف علاقة ترتيب عليها بحيث تصبح مرتبة جيداً وفقها طالما أنها وحيدة العنصر

٣) كما أنه أياً كان a من هذه المجموعة فإن $a=\Phi(M)=\Phi(M-\emptyset)$ حيث $\emptyset$ هي القطعة الخالية من $\{\Phi(M)\}$ والتي تتعين بأصغر عنصر في $\{\Phi(M)\}$ والذي هو $a=\Phi(M)$

- (سنثبت الآن أنه يمكننا تعريف علاقة ترتيب على M بحيث تجعلها مرتبة كلياً)

لتكن A,B مجموعتين مميزتين في M (سنثبت أنهما متقارنتين وفق علاقة ترتيب)

عندئذٍ يكون:

$\Phi(M)\in A\cap B$ حيث يكون $\Phi(M)$ العنصر الأصغر في كل من A و B

((ملاحظة جانبية :

إن $\Phi(M)$ عنصر أصغري في A المجموعة المميزة في M وذلك لأن :

بما أن A مجموعة مميزة في M فإن A مرتبة جيداً وفق علاقة ترتيب ما ولتكن $<$ أي أنها مرتبة كلياً وتحقق الشرط الأصغري وبالتالي يوجد في A عنصر أصغري وليكن a وهو بالتالي عنصر أصغري A (لأنها مرتبة كلياً فينطبق مفهوم الأصغري على الأصغر) ، وبما أن A مجموعة مميزة في M فإنه حسب (٢) من تعريف المجموعة المميزة يكون $a=\Phi(M-A')$ حيث A' هي قطعة من A تتعين بالعنصر a الأصغري في A أي أن : $A'=\{x \mid x\in A ; x<a\}$

وبما أن a عنصر أصغري في A فلا يوجد في A أي عنصر x بحيث $x<a$ ومنه فإن $A'=\emptyset$ وبالتالي يكون $a=\Phi(M-A')=\Phi(M-\emptyset)=\Phi(M)$ عنصر أصغري في A

أي أن : $a=\Phi(M)\in A$ عنصر أصغري في A

- بنفس الأسلوب تماماً نجد أن $b=\Phi(M)\in B$ عنصر أصغري في B)) .

إذاً : $\Phi(M)\in A\cap B$ حيث $\Phi(M)$ العنصر الأصغري في كل من A و B

- كما نلاحظ أن المجموعة $\{\Phi(M)\}$ تكون قطعة من A وقطعة من B وهذه القطعة غير خالية (لأن $\Phi(M)$ عنصر أصغري في كل منه A و B إذاً أي عنصر من A أو من B أصغر أو يساوي $\Phi(M)$ فإنه حتماً سيساوي $\Phi(M)$ وبالتالي سينتمي إلى $\{\Phi(M)\}$ فهي إذاً قطعة في كل منه A و B)

- ومنه يمكننا أن نقول أنه توجد قطعة مشتركة (غير خالية) بين المجموعتين المميزتين المفروضتين A و B . (*)

- لتكن C هي اجتماع جميع القطع المشتركة (وغير الخالية) بين المجموعتين المميزتين A و B (وهي غير خالية حسب(*))

- فيكون $\boxed{C\subseteq A \quad \text{و} \quad C\subseteq B}$ (لأن C مجموعة القطع المحتواة في كل منه A و B)

- كما يمكننا أن نقول أن C قطعة مشتركة (وغير خالية) في المجموعتين المميزتين A و B (اجتماع القطع هو قطعة) وذلك بملاحظة مايلي :

لكن $b\in C$ و لنكن $x\preceq b$ عندئذٍ :

بما أن C هي اجتماع القطع المشتركة بين A و B وحيث $b\in C$ فإنه يوجد قطعة مشتركة بين A و B مثل القطعة H بحيث تكون $b\in H$ وبما أن $x\preceq b$ نجد أن $x\in H$ (لأن H قطعة) ومنه فإن $x\in C$ (حيث $H\subseteq C=$ اجتماع القطع المشتركة)

إذاً فإن C اجتماع جميع القطع المشتركة بين A و B هي بحد ذاتها قطعة مشتركة بين A و B ومنه يمكننا أن نقول أن C هي أكبر قطعة مشتركة بين المجموعتين المميزتين A و B

- لنفرض مؤقتاً أن $C\neq A$ و $C\neq B$

عندئذٍ يكون : $\Phi(A-C)$ هو العنصر الذي تتعين به القطعة C (حيث C قطعة في A المميزة).

ومنه : بأخذ $C_1=C\cup\{\Phi(A-C)\}$ نجد أن :

C_1 قطعة مشتركة بين A و B

((لأنه بفرض $b\in C_1$ و $x\preceq b$ فإنه :

إما $b\in\{\Phi(A-C)\}$ ومنه $b=\Phi(A-C)$ أي أن b عنصر أصغري في $A-C$ ومنه

إذا كان $x\in A-C$ وحيث $x\preceq b$ و b أصغري في $A-C$ فإن $x=b$ وبالتالي $x\in\{\Phi(A-C)\}$ عاينى أن $\boxed{x\in C_1}$

إذا كان $x\notin A-C$ أي أن $x\in C$ فمباشرة يكون $\boxed{x\in C_1=C\cup\{-\}}$

أو $b\in C$ و $x\preceq b$ وحيث C قطعة فإن $x\in C$ ومنه $\boxed{x\in C_1}$

إذاً في جميع الحالات بفرض $b\in C_1$ و $x\preceq b$ فإن $x\in C_1$ ومنه C_1 قطعة مشتركة))

- وبملاحظة أن $C\subsetneqq C_1$ نحصل على تناقض مع كون C هي أكبر قطعة مشتركة بين A و B ، ومنه نجد أن الفرض الجدلي خاطئ

إذاً إما $C=A$ أو $C=B$ ومنه بالتعويض في $\boxed{C\subseteq B \text{ و } C\subseteq A}$

نجد أن إما $A\subseteq B$ أو $B\subseteq A$ وبالتالي A و B متقارنين وفق $\subseteq$ منه

إذاً علاقة ترتيب كلي على M

~ انتهت المحاضرة ~