27/3/2014

المحاضرة الثالثة

ثالثا: نموذج الاستغلال الأمثل للأراضي الزراعية

لنفرض أنه لدينا n منطقة زراعية مساحة كل منطقة على التوالي $a_1, a_2, \dots a_n$ هكتار، ونريد زراعتها بـ m نوع من المحاصيل الزراعية.

ولتأمين متطلبات المجتمع منها نريد أن المحصول i الكمية b_i

إذا كان متوسط إنتاج واحدة المساحة من السهل j من المحصول i يساوي a_{ij} طن في الأشهر

وكان الربح الحاصل من كل واحدة من المحصول i يساوي c_i

المطلوب:

كم يجب أن تزرع من المساحة الأرض زراعتها بكل من المحاصيل في جميع المناطق لتحقيق أكبر ربح ممكن لها، مع تلبية حاجات المجتمع من كل محصول.

الحل: نرمز x_{ij} لمقدار المساحة من المنطقة j التي يجب زراعتها بالمحصول i

عندئذ يكون لدينا الجدول التالي:

المحاصيل \ المناطق	1	2	....	n	مقدار الطلب	الربح
1	a_{11} x_{11}	a_{12} x_{12}	...	a_{1n} x_{1n}	b_1	c_1
2	a_{21} x_{21}	a_{22} x_{22}	...	a_{2n} x_{2n}	b_2	c_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
m	a_{m1} x_{m1}	a_{m2} x_{m2}	...	a_{mn} x_{mn}	b_m	c_m
المساحة المزروعة	a_1	a_2	...	a_n		

بالنسبة للربح الناتج من المحصول الأول: $c_1 \sum_{j=1}^{n} x_{1j}$

الثاني: $c_2 \sum_{j=1}^{n} x_{2j}$

المحصول m: $c_m \sum_{j=1}^{n} x_{mj}$

فيكون الربح الناتج من كافة المحاصيل:

$$c_1 \sum_{j=1}^{n} x_{1j} + c_2 \sum_{j=1}^{n} x_{2j} + \dots + c_n \sum_{j=1}^{n} x_{mj}$$

* شروط الطلب:

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots a_{1n}x_{1n} \geq b_1$$
$$a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \dots a_{2n}x_{2n} \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots a_{mn}x_{mn} \geq b_m$$

(الاشارة \geq أكبر أو يساوي لأنه لا يتم إنتاج زائد لأن الفائض يرهب المستهلك)

* شروط المساواة المزدوجة:

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = a_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = a_2$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = a_n$$

* شروط عدم السلبية: $x_{ij} \geq 0 \; ; \; i = \overline{1,m} \; , \; j = \overline{1,n}$

النموذج الرياضي: أوجد

$$z = c_1 \sum_{j=1}^{n} x_{1j} + \dots + c_m \sum_{j=1}^{n} x_{mj} \longrightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_{1n} \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots + a_{mn}x_{mn} \geq b_m$$
$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = a_1$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = a_n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = \overline{1,m} \; , \; j = \overline{1,n}$$

SABBAGH STATIONERY

مثال: مزرعة مستقلة لها 4 مناطق زراعية: [الساحل، الباب، حلب، حمص]
مساحة كل منها [10، 15، 100، 50] هكتار على الترتيب
وذلك لزراعتها بالمحاصيل التالية: [قمح، شعير، قطن، تبغ، سكوند]
والتي تحتاج مساحاتها كالتالي: [2000، 1500، 500، 100، 700] طن
على الترتيب.
لنفرض أن إنتاجية تلك المناطق من تلك المحاصيل وأسعارها معطاة بالجدول التالي:

المنطقة / المحصول	الساحل	الباب	حلب	حمص	الطلب	سعر الطن
قمح	x_{11} 5	x_{12} 4	x_{13} 6	x_{14} 6	2000	1500
شعير	x_{21} 6	x_{22} 5	x_{23} 4	x_{24} 6	1500	1000
قطن	x_{31} 4	x_{32} 10	x_{33} 8	x_{34} 5	500	5000
تبغ	x_{41} 7	x_{42} 2	x_{43} 0	x_{44} 0	100	4500
سكوند	3	12	10	4	700	500
المساحة	10	15	100	50		

الحل: نفرض أن x_{ij} المساحة المزروعة من المحصول i في المنطقة j

- بالنسبة للمساحة المزروعة من القمح في المناطق جميعاً: $\sum_{j=1}^{4} x_{1j}$

والكميات المنتجة من القمح: $5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14}$

والربح من القمح عبارة عن: $1500(5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14})$

- بالنسبة للمساحة المزروعة من الشعير في المناطق جميعاً: $\sum_{j=1}^{4} x_{2j}$

والكميات المنتجة من الشعير: $6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24}$

والربح من الشعير: $1000(6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24})$

- بالنسبة للمساحة المزروعة من القطن في المناطق جميعاً: $\sum_{j=1}^{4} x_{3j}$

والكميات المنتجة من القطن: $4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}$

والربح من القطن: $5000(4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34})$

- بالنسبة للمساحة المزروعة من التبغ في المناطق جميعاً: $\sum_{j=1}^{4} x_{4j}$

والكميات المنتجة من التبغ: $7x_{41} + 2x_{42} + 0$

والربح من التبغ: $4500(7x_{41} + 2x_{42})$

- بالنسبة للمساحة المزروعة من السكوتر في المناطق: $\sum_{j=1}^{4} x_{5j}$

والكميات المنتجة منه: $3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54}$

والربح من السكوتر: $500(3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54})$

بناءً على المناقشة السابقة:

$$Z = 1500(5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14}) + 1000(6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x$$
$$+ 5000(4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}) + 4500(7x_{41} + 2x_{42})$$
$$+ 500(3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54})$$

صفحة القيود:

① شروط الطلب:

$$5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} \geq 2000$$
$$6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24} \geq 1500$$
$$\vdots$$

② شروط المساحة المزروعة:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 10$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 15$$
$$\vdots$$

③ شروط عدم السلبية: $x_{ij} \geq 0 \quad i=\overline{1,4} \;,\; j=\overline{1,5}$

متغير — قاعدة

النموذج الرياضي: أدرج

$$Z = 1500(5x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+6x_{14}) + 1000(6x_{21}+5x_{22}+4x_{23}+6x_{24}) + 5000(4x_{31}+10x_{32}+8x_{33}+5x_{34}) + 4500(7x_{41}+2x_{42}) + 500(3x_{51}+12x_{52}+10x_{53}+4x_{54}) \longrightarrow \text{Max}$$

صمن القيود:

$$5x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+6x_{14} \geq 2000$$
$$6x_{21}+5x_{22}+4x_{23}+6x_{24} \geq 1500$$
$$4x_{31}+10x_{32}+8x_{33}+5x_{34} \geq 500$$
$$7x_{41}+2x_{42}+0 \geq 100$$
$$3x_{51}+12x_{52}+10x_{53}+4x_{54} \geq 700$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51} = 10$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52} = 15$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53} = 100$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54} = 50$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad i=\overline{1,4} \;,\; j=\overline{1,5}$$

رابعاً تركيب الخلائط

نعالج في هذا النموذج مسألة تركيب الخلائط، ونقصد بها أي خليطة معدنية أو غذائية أو بيتونية ..

نفرض أننا نركب خليطة من n مادة مناسبة وكل مادة تحتوي على m عنصر

حيث واحدة المادة j تحتوي a_{ij} واحدة من العنصر i

وسعر الواحدة من المادة j يساوي c_j

ونريد أن تحتوي العنصر i في الخليطة على مقدار معين b_i

وتكون تلك الخليطة أصغر ما يمكن، المطلوب:

صياغة النموذج الرياضي الذي يحقق طلبات المسألة ..

سننظم المسألة في جدول كالتالي:

المواد الداخلة في التركيب / العناصر الموجودة في كل مادة	A_1	A_2	--	A_n	المقدار المطلوب
B_1	a_{11}	a_{12}	--	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	--	a_{2n}	b_2
⋮	⋮				
B_m	a_{m1}	a_{m2}	--	a_{mn}	b_m
السعر	c_1	c_2	--	c_n	
الكميات المطلوبة	x_1	x_2	--	x_n	

نفرض x_j هي الكميات الداخلة في تركيب الخليطة من $j = \overline{1,n}$

تكلفة المادة الأولى: c_1x_1، والثانية c_2x_2 --

وبالتالي التكلفة الإجمالية: $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

* A_1 تحتوي B_1 العنصر الموجود في المادة $a_{11}x_1$

A_2 " B_1 " " " $a_{12}x_2$

⋮

A_n " B_1 " " " $a_{1n}x_n$

SABBAGH STATIONERY

وبالتالي شروط الطلب:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

وشروط عدم السلبية: $x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}$

والنموذج الرياضي:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{Min}$$

أوجد ضمن الشروط:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$
$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}$$

مثال: تركيب الوصفات العلفية

لنفرض أننا نريد تركيب وجبة علفية من أربع أنواع من المواد A_1, A_2, A_3, A_4 وسعر الوحدة الواحدة من كل منها: c_1, c_2, c_3, c_4.

ونفترض أنه يشترط أن تتضمن الوجبة مقادير معينة من كل من العناصر الغذائية الآتية: البروتينات، الكربونات، الدهنيات على أن لا تقل كمية البروتين فيها عن b_1 وألا تقل كمية الكربونات عن b_2، وكمية الدهنيات عن b_3.

المطلوب:

إعداد المقادير اللازمة من كل من المواد A_1, A_2, A_3, A_4 التي تدخل في الوجبة بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن إذا علمت أن

وحدة A_1 تحوي a_{11} واحدة بروتين و a_{21} واحدة كربونات و a_{31} واحدة دهنيات

" " a_{32} " " a_{22} " " a_{12} " A_2 "

" " a_{33} " " a_{23} " " a_{13} " A_3 "

" " a_{34} " " a_{24} " " a_{14} " A_4 "

الرتبة الحاصرة