المحاضرة العاشرة 24/4/2014

النموذج الرياضي للعبة من الدرجة $n \times m$

لقد رأينا أنه إذا كانت اللعبة مستقرة (لها نقطة سرجية) فإن الحل الأمثل لها وهو الاستراتيجية المقابلة لتلك النقطة السرجية، وإن ثمن تلك اللعبة عندها يساوي قيمة a_{ij} المقابلة لتلك النقطة السرجية نفسها

بصورة عامة:

إن البحث عن الحل الأمثل للعبة ما يستدعي البحث عن قانون التوزيع الاحتمالي P_A و Q_B الذين يعطيان الحل بواسطة الاستراتيجيات المركبة، ويحددان نسبة استخدام كل منهما في عملية اللعب.

هنا يستدعي إيجاد النموذج الرياضي للعبة، لذلك نفرض أن A ، B هما طرفا اللعبة وأن لـ A الاستراتيجيات التالية: $A_1, A_2, \dots, A_m$

التي يطبقها وفق قانون التوزيع الاحتمالي التالي: $P_A : P_1, P_2, \dots, P_m$

حيث أن هذا القانون مازال مجهول بالنسبة لنا مجهولة ..

ولدينا: $0 \le P_i \le 1$ ، $\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$

كذلك أن لـ B الاستراتيجيات التالية: $B_1, B_2, \dots, B_n$

التي يطبقها وفق قانون التوزيع الاحتمالي التالي: $Q_B : q_1, q_2, \dots, q_n$

الذي مازال مجهول بالنسبة لنا ..

ولدينا $0 \le Q_j \le 1$ ، $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$

كذلك للعبة مصفوفة المدفوعات (a_{ij})

نناقش أولاً المسألة من وجهة نظر الطرف A ..

حيث أنه إذا قام A بتطبيق استراتيجيته المركبة وفق قانون التوزيع P_A فإن متوسط الربح الذي يحققه A عندما يتبنى B الاستراتيجية المفردة B_j

$$a_j = P_1 a_{1j} + P_2 a_{2j} + \dots + P_m a_{mj}$$

وبما أن A يحاول دائماً أن يجعل ربحه لا يقل عن ثمن اللعبة v الذي ينتج عن تبني الطرفين لاستراتيجيتين مركبتين ثابتتين فإن مهمته تنحصر بالعثور على الاستراتيجية المركبة المثالية والاستفادة من كل خطأ يقع فيه B .. أي عليه أن يبحث عن P_A^* الأعداد $P_A^*(P_1^*, P_2^*, \dots P_m^*)$ التي يكون فيها a_j لا يقل عن v

أي يجب أن تتحقق المتراجحات التالية:

$$\text{I}\begin{cases} P_1 a_{11} + P_2 a_{21} + \dots + P_m a_{m1} \geq v \\ P_1 a_{12} + P_2 a_{22} + \dots + P_m a_{m2} \geq v \\ \vdots \\ P_1 a_{1n} + P_2 a_{2n} + \dots + P_m a_{mn} \geq v \end{cases}$$

B يستخدم الاستراتيجية الأولى
[illegible] في كل حالات A

توضيح: تم تشكيل كل شرط من جداء عناصر كل عمود بقيم التوزيع الاحتمالي P_i وبذلك تكون مصفوفة الأمثال هي منقول مصفوفة المدفوعات..

ونضيف الشرط:

$$\text{II}\quad P_1 + P_2 + \dots + P_m = 1$$
$$P_i \geq 0 \;;\; i = \overline{1,m}$$

عندئذ يكون تابع الهدف $Z = v \longrightarrow Max$

مادامت الاستراتيجية المثالية لكلا الطرفين غير معلومة فإن ثمن اللعبة يبقى مجهولاً وهو يكون سالباً أو موجباً أو معدوماً ..

حيث أنه يكون معدوم في حال تكون اللعبة عادلة ..

من أجل معالجة المسألة بشكل رياضي صحيح نفترض $\boxed{v > 0}$

ولجعل ثمن اللعبة v موجبة يجب يكفي أن نضيف الى عناصر مصفوفة المدفوعات (a_{ij}) أي عدد موجب كبير مثل M بحيث تصبح جميع عناصر المصفوفة (المدفوعات) غير سالبة..

وفي هذه الحالة يزداد ثمن اللعبة بمقدار العدد المضاف M ولتصبح v':

$$v' = v + M \Longrightarrow \boxed{v = v' - M}$$

ملاحظة: إن هذه العملية ضرورية ولا بد منها عندما تكون بعض عناصر مصفوفة المدفوعات سالبة. حتى لا يتضمن النموذج الرياضي متحولات سالبة أو غير مقيدة.

ملاحظة: بعد حل اللعبة والحصول على الحل المثالي يجب أن نحسب القيمة الحقيقية v من العلاقة التالية: $\boxed{v = v' - M}$

ملاحظة: علينا عند الضرورة ضرب مصفوفة المدفوعات بأي عدد موجب لجعلها أعداد صحيحة سهلة التعامل.

نعود لإيجاد النموذج الرياضي:

نقوم بتقسيم كل من طرفي المتراجحات (I) على v' حيث $v' > 0$

$$\frac{p_1}{v'} a_{11} + \frac{p_2}{v'} a_{21} + \dots + \frac{p_m}{v'} a_{m1} \geq \frac{v}{v'}$$

$$\frac{p_1}{v'} a_{12} + \frac{p_2}{v'} a_{22} + \dots + \frac{p_m}{v'} a_{m2} \geq \frac{v}{v'}$$

$$\vdots$$

$$\frac{p_1}{v'} a_{1n} + \frac{p_2}{v'} a_{2n} + \dots + \frac{p_m}{v'} a_{mn} \geq \frac{v}{v'}$$

نرمز بـ x_i لكل المقادير $\frac{p_i}{v'}$ حيث $i = \overline{1,m}$

$$\boxed{x_i = \frac{p_i}{v'}}$$

عندئذ تصبح المتراجحات السابقة:

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{m1} x_m \geq \frac{v}{v'}$$

$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{m2} x_m \geq \frac{v}{v'}$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \dots + a_{mn} x_m \geq \frac{v}{v'}$$

من الشرط (II) نلاحظ أن:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{v'}$$

$$x_i \geq 0 \; ; \; i = \overline{1,m}$$

SABBAGH STATIONERY

نجد أننا قمنا بإضافة M إلى عناصر مصفوفة المدفوعات فحصلنا بالنتيجة على نفس مجموعة المتراجحات (I) على الطرف الثاني يساوي $v' = M + v$

وعندما قمنا بتقسيم طرفي كل متراجحة من المتراجحات السابقة نحصل على مجموعة المتراجحات التي لها الطرف الثاني يساوي الواحد... $\frac{v'}{v'} = 1$

عندها تصبح النموذج الرياضي بالشكل:

نحن نريد أن يكون $Max \frac{1}{v'}$ لذلك نكتب تابع الهدف:

$$L = x_1 + x_2 + \dots + x_m \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط:

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{m1} x_m \geq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \dots + a_{mn} x_m \geq 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = \overline{1,m}$$

III

وهو نموذج رياضي خطي يتضمن m مجهول وعليه n شرط

بحل هذا النموذج نحصل على x^*: $x^*(x_1^*, x_2^*, \dots x_m^*)$

ثم نقوم بحساب ثمن اللعبة $v' = \frac{1}{x_1^* + x_2^* + \dots x_m^*}$

ثم نقوم بحساب عناصر التوزيع الاحتمالي من خلال العلاقة: $P_i = x_i^* \cdot v'$, $i = \overline{1,m}$

فنحصل على التوزيع الاحتمالي المقابل للاستراتيجية المركبة المثالية لـ A والذي رمزنا له

$$P_A^* (P_1^*, P_2^*, \dots P_m^*)$$

غالباً ما يكون بعض هذه الأعداد معدومة لأن الحل المثالي هو حل قاعدة وينطبق على نقطة رأسية

هذا النموذج خاص بـ A ..

لإيجاد النموذج الخاص بالطرف B ، والذي يعطينا استراتيجية المركبة المثالية نقوم بإيجاد النموذج المرافق للنموذج الخاص بالطرف A وهنا يأخذ الشكل:

نشير أخيراً إلى أنه لأية لعبة من المرتبة $n \times m$ نعجز تحويلها الى نموذج من نماذج البرمجة الخطية حل مثالي وذلك لأن الحل المثالي يكون غير موجود في إحدى الحالتين:

1 — إذا كانت الشروط متعارضة وعندها لا يوجد أي حل مقبول

2 - إذا كانت منطقة الحلول مفتوحة باتجاه تناقص التابع L (أو تزايد التابع Z) عندها يكون التابع L غير محدود من الأسفل ، ولنبرهن أن كلاً من الحالتين السابقتين بعيدتان عن النماذج الخطية للألعاب

نلاحظ أنه بعد أن نجعل جميع عناصر مصفوفة المدفوعات موجبة (أو على الأقل غير سالبة) فإننا إذا بحثنا عن أصغر عنصر من عناصر المصفوفة وليكن M حيث M لا يساوي الصفر فإننا نجد:

$$M = \min_i \min_j a_{ij}$$

ووضعنا

$$x_1 = \frac{1}{M}, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

فإننا نكون قد حصلنا على حل مقبول لأنه يحقق الشروط (II)

وبذلك نكون قد تأكدنا من عدم تعارض الشروط

للتأكد من عدم وجود الحالة الثانية نلاحظ أن المتحولات $x_1, \dots, x_m$ غير سالبة وأن أمثالها في عبارة التابع L موجبة .. هذا يعني أن L لا يمكن أن يكون سالباً أي أنه محدود من الأسفل (نفس الكلام للنموذج المرافق Max)

أي أن الحل المثالي للألعاب من المرتبة $n \times m$ دائماً موجود.

ملاحظة أخيرة:

علينا في كثير من الحالات تخفيض مرتبة اللعبة وذلك بحذف الاستراتيجيات غير الرابحة أو المكررة حيث أن الاستراتيجية a_i تكون غير مربحة للطرف A، إذا كانت عناصرها أصغر من مقابلاتها في استراتيجية أخرى..
وتكون الاستراتيجية B_j غير مربحة بالنسبة للطرف B إذا كانت عناصرها أكبر من مقابلاتها في استراتيجية أخرى..

مثال: أوجد الحل المثالي للعبة التي لطرفها A 3 استراتيجيات. A_1, A_2, A_3
ولطرفها B ثلاث استراتيجيات B_1, B_2, B_3 ولها مصفوفة المدفوعات:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

نلاحظ أنه يوجد بعض العناصر السالبة لذا نضيف العدد $M = 5$
لجميع عناصر المصفوفة فنحصل على المصفوفة التالية:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

إذاً شكلنا $v' = v + 5$

نقوم بإيجاد النموذج الرياضي (سنبنيه بالنسبة لـ A) لتشكيل تابع الهدف

$$L = x_1 + x_2 + x_3$$

حيث $x_i = \frac{P_i}{v'}$; $i = \overline{1,3}$

الشروط :

$$7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 1$$
$$2x_1 + 9x_2 + 0x_3 \geq 1$$
$$9x_1 + 0x_2 + 11x_3 \geq 1$$
$$x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,3}$$

(مطالبين بحل النموذج وإيجاد الحل المثالي بطريقة السمبلكس)

- ثم أوجد النموذج الرياضي بالنسبة لـ B

نقوم بحل النموذج بطريقة السمبلكس نجد أن :

$$x_1 = \frac{1}{20} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{10} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{20}$$

الذي يعطينا $z = -\frac{1}{5}$

المرافق : $L = -z = \frac{1}{5}$

• إن الثمن الوهمي (الاصطناعي) للعبة هو $v' = \frac{1}{L}$ ، $v' = 5$

ولكن $v = v' - 5 = 0$

عندئذ تصبح قيم التوزيع الاحتمالي بالنسبة لـ A

$$P_1^* = x_1 . v = \frac{1}{20} \; 5 = \frac{1}{4}$$

$$P_2^* = x_2 . v = \frac{1}{2} \quad , \quad P_3^* = \frac{1}{4}$$

ومنه التوزيع الاحتمالي للاستراتيجية A المثالية المركبة :

$$P_A^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

تفسير النتائج : ان الاستراتيجية المثالية المركبة لـ A تتألف من الاستراتيجيات المفردة الثلاث ، ولكن تطبيق كل منها يختلف عن الآخر

فحتى يحصل A على أكبر ربح ممكن عليه أن يطبق الاستراتيجية المفردة الأولى باحتمال قدره $\frac{1}{4}$

(مرة كل أربع مرات) « أي يطبق استراتيجية A_1 مرة كل 4 مرات »

ويطبق الاستراتيجية المفردة الثانية باحتمال قدره $\frac{1}{2}$

(أي مرتين كل أربع مرات)

ويطبق الاستراتيجية المفردة الثالثة باحتمال قدره $\frac{1}{4}$

(أي مرة كل 4 مرات)

بذلك يضمن متوسط ربح قدره صفر ..

عند تكرار اللعبة عدد كبير من المرات ، وذلك بفرض أن B هو الآخر لديه استراتيجية مثالية مقابلة ..

من النتائج نلاحظ: أن هذه اللعبة هي لعبة عادلة لأن قيمتها تساوي الصفر.

ملاحظة: لإيجاد الاستراتيجية المركبة المثالية للطرف B نقوم بإيجاد النموذج الرياضي المرافق للنموذج السابق ونستنتج حله من حل النموذج الأصلي ..

انتهت المحاضرة ..