تمارين محلولة

س ١: أوجد التغير الكلي للدالة $g(x) = [x] = \lfloor x \rfloor$ على المجال $[-2,2]$

مع الرسم . (الجزء الصحيح للعدد $x \in \mathbb{R}$).

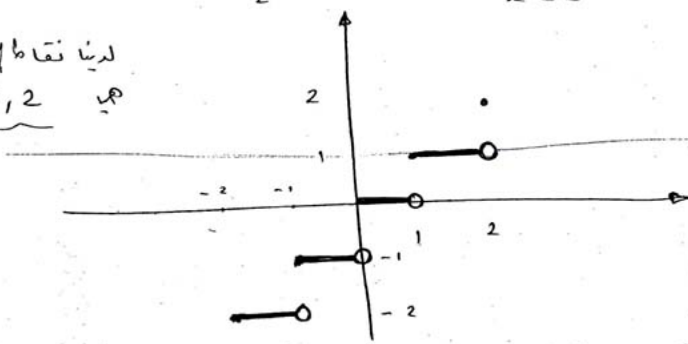
الحل: إن $n \leq x \lneq n+1 \Leftarrow \lfloor x \rfloor = [x] = n$

أي أن

$$f(x) = \begin{cases} -2 & -2 \leq x \lneq -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

البداية

لدينا نقاط الانقطاع هي $-1, 0, 1, 2$



نلاحظ أن الدالة متزايدة حيث $\forall x_1 < x_2 : x_1, x_2 \in [-2,2]$

$$\Longrightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$$

وبالتالي

$$\bigvee_{-2}^{2} g = \bigvee_{-2}^{2} [x] = |g(2) - g(-2)|$$
$$= |2 - (-2)| = 4 .$$

وفي الحالة العامة

$$\bigvee_{-n}^{n} g = |g(n) - g(-n)| = |n - (-n)| = 2n$$

$(s)\ \int_{-2}^{2} 1\, d[x] = f(-1).1 + f(0).1 + f(1).1 + f(2).1 = 4$

س٢ :

أوجد التغير الكلي للدالة $g(x)=\lceil x\rceil$ على المجال $[-2,2]$

مع الرسم . (أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي x)

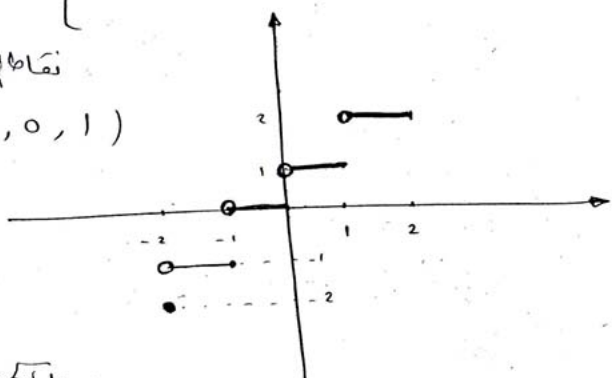
الحل : إذا $n < x \le n+1 \Longleftarrow g(x)=\lceil x\rceil = n+1$

$$g(x)=\begin{cases} -2 & x=-2 \\ -1 & -2<x\le -1 \\ 0 & -1<x\le 0 \\ 1 & 0<x\le 1 \\ 2 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

البداية

نقاط الانقطاع هي

$(-2,-1,0,1)$



نلاحظ أن الدالة $f(x)$ متزايدة على المجال $[-2,2]$ وبالتالي

$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} g = \overset{2}{\underset{-2}{V}} \lceil x\rceil = |g(2)-g(-2)| = |2-(-2)| = 4$$

ونلاحظ أن تكامل ستيلجس لهذه الدالة إذا كانت $f(x)=1$ هي

$$\int_{-2}^{2} 1\, d\lceil x\rceil = f(-2).1 + f(-1).1 + f(0).1 + f(1).1$$

القفزة .

$$= 4$$

٣/

س ٣ : بين أن الدالة $f(x) = x - [x]$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ، ثم أوجد التغير الكلي للدالة $f(x) = x - [x]$ على $[-2,2]$ مع الرسم .

الحل: [1] نلاحظ أن $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ حيث

$\varphi(x) = x$ دالة متزايدة على أي مجال مغلق $[a,b]$

وكذلك $g(x) = [x]$ دالة متزايدة على أي مجال مغلق $[a,b]$

وبالتالي $f(x)$ فرق لدالتين متزايدتين على أي مجال مغلق $[a,b]$

فهي د . ت . م ، و هـ م

---

[2] الرسم : نلاحظ أن

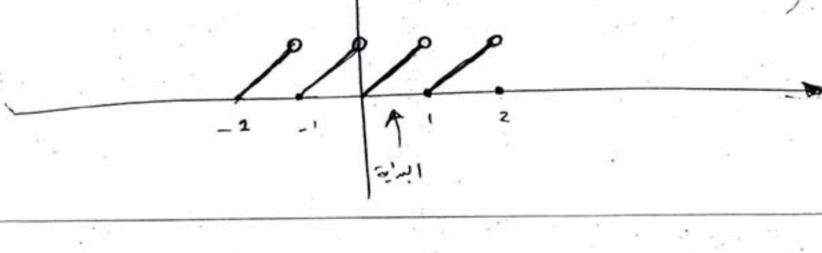
$$f(x) = \begin{cases} x-(-2) & -2 \le x < -1 \\ x-(-1) & -1 \le x < 0 \\ x-0 & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ x-2 & x = 2 \end{cases}$$

البداية ← ($0 \le x < 1$)

أي أن

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \le x < -1 \\ x+1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

الرسم :



$$\text{ع}/\quad \overset{2}{\underset{-2}{V}} f = \overset{-1}{\underset{-2}{V}} f + \overset{0}{\underset{-1}{V}} f + \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{2}{\underset{1}{V}} f .$$

لحساب $\overset{-1}{\underset{-2}{V}} f$ نأخذ تجزئة عشوائية نونية منتظمة لـ $[-2,-1]$

$$P = \{-2 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = -1\}$$

$$\Delta x = \frac{-1-(-2)}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -2 \\ x_1 &= -2 + \tfrac{1}{n} \\ x_2 &= -2 + \tfrac{2}{n} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= -2 + \tfrac{n-1}{n} \\ x_n &= -2 + 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} f(-2) &= -2 + 2 = 0 \\ f(-2 + \tfrac{1}{n}) &= \cancel{-2} + \tfrac{1}{n} + \cancel{2} \\ f(-2 + \tfrac{2}{n}) &= \cancel{-2} + \tfrac{2}{n} + \cancel{2} \\ &\vdots \\ f(-2 + \tfrac{n-1}{n}) &= \cancel{-2} + \tfrac{n-1}{n} + \cancel{2} \\ f(-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n-1} + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n}$$

$$V(f, P) = \frac{2n-2}{n} \Rightarrow \overset{-1}{\underset{-2}{V}} f = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n-2}{n}\right) = 2$$

وبالطريقة ذاتها (أو بنفسها) نجد

$$\overset{0}{\underset{-1}{V}} f = 2$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = 2 \quad , \quad \overset{2}{\underset{1}{V}} f = 2 \quad \Rightarrow \overset{2}{\underset{-2}{V}} f = 2+2+2+2 = 8$$

و. هـ. م

نظرية القياس

س: لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ ، وليكن $D=\{\{a,b\},\{c\}\}$ من أجزاء X .

① هل D يشكل حلقة ، لماذا ؟

② هل D يشكل جبراً ، لماذا ؟

③ هل D يشكل طوبولوجيا ، لماذا ؟

④ أوجد أصغر حلقة تحوي D ؟

⑤ = = جبر يحوي D ؟

⑥ = = طوبولوجيا تحوي D ؟

⑦ = أصغر جبر من أجزاء X .

⑧ = أكبر جبر من أجزاء X .

الحل:

① D ليست حلقة لأن $\Phi \notin D$.

② D ليست جبراً لأن $\Phi \notin D$.

③ D ليست طوبولوجيا لأن $\Phi \notin D$.

④ نلاحظ أن $\tau=\{\Phi,\{a,b\},\{c\},\{a,b,c\}\}$ يشكل حلقة لأن ① $\Phi\in\tau$ ، ② $\forall A,B\in\tau \Rightarrow A\cup B\in\tau$
③ $\forall A,B\in\tau \Rightarrow A\setminus B\in\tau$

⑤ نلاحظ أن $\mathcal{A}=\{\Phi,\{a,b\},\{c\},\{a,b,c\},X,\{c,d\},\{a,b,d\},\{d\}\}$ يشكل "جبر" لأن
① $\Phi\in\mathcal{A}$ ، ② $\forall A,B\in\mathcal{A} \Rightarrow A\cup B\in\mathcal{A}$ ③ $\forall A\in\mathcal{A} \Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$

7/ ⑦ نوضح أن $\mathcal{A}=\{\Phi, X\}$ أصغر

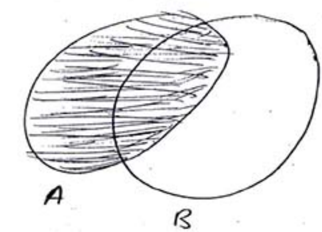
⑧ نوضح أن $\mathcal{A}=\mathcal{P}(X)$

$A=\{\Phi, \{a\},\{b\},\{c\},\{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\},$
$\{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\},$
$\{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\} \Rightarrow |\mathcal{A}| = 2^4=16$

⑥ $T = \{\Phi, \{a,b\}, \{c\}, \{a,b,c\}, X\}$

س: إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس اثبت أن

$$\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$$



$A\cup B = A\cup(B\setminus A)$

$\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B\setminus A)$

$= \mu(A)+\mu(B\setminus(A\cap B))$

$= \mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$ $\quad A\cap(B\setminus A)=\Phi$

س: إذا كان $(x,\mathcal{A},\mu)$ فضاء قياس أثبت أن

$\forall A,B\in\mathcal{A} : \mu(A\Delta B)=0 \Longrightarrow \mu(A)=\mu(B)$

$\mu(A\Delta B) = \mu((A\setminus B)\cup(B\setminus A)) = 0 \quad : (A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\Phi$

$\mu(A\setminus B)+\mu(B\setminus A)=0$

$\Rightarrow \mu(A\setminus B)=0 \Rightarrow \mu(A\setminus(A\cap B)) = \mu(A)-\mu(A\cap B)=0$

$\mu(B\setminus A)=0 \Rightarrow \mu(B\setminus(A\cap B)) = \mu(B)-\mu(A\cap B)=0$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mu(A)=\mu(A\cap B)\\ \mu(B)=\mu(A\cap B)\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\mu(A)=\mu(B)}$ ه.ع.م

انتهى