حل التمرين في المحاضرة السابقة:

إذا كانت $n>m$ فلا يوجد أي تابع غامر من $[m]$ إلى $[n]$ وعددها صفر لذلك نفرض أن $n\leq m$.

لتكن A_i مجموعة كل التوابع $f:[m]\longrightarrow[n]$ حيث أن العنصر $i\in[n]$ لا يصله أي سهم أي أن:

$$A_i=\{f:[m]\longrightarrow[n] : f^{-1}(\{i\})=\phi\}$$

فتكون A_i^c هي مجموعة التوابع $f:[m]\longrightarrow[n]$ حيث أن العنصر $i\in[n]$ يصله سهم على الأقل وبالتالي المجموعة:

$$A_1^c\cap A_2^c\cap\dots\dots\cap A_n^c$$

هي مجموعة كل التوابع الغامرة من $[m]$ إلى $[n]$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = 1\times 1 + \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \sum_{1\leq i_1<\dots<i_r\leq n}|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_r}|$$

X هي مجموعة كل التوابع من $[m]$ إلى $[n]$:

$$\rightarrow 1\times 1 = m^n$$

مجموعة $A_{i_1}\cap\dots\dots\cap A_{i_r}$ هي مجموعة كل التوابع من $[m]$ إلى $[n]$ حيث جميع العناصر $i_1,i_2,\dots\dots,i_r\in[n]$ لا يصلها أي سهم وبالتالي:

$$|A_{i_1}\cap\dots\dots\cap A_{i_r}| = |F([m],[n]\setminus\{i_1,\dots\dots,i_r\})| = (n-r)^m$$

$$\rightarrow \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = n^m + \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \cdot \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_r\leq n}(n-r)^m$$

$$= n^m + \sum_{r=1}^{n}(-1)^r(n-r)^m \cdot \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_r\leq n} 1$$

$$= n^m + \sum_{r=1}^{n}(-1)^r(n-r)^m\binom{n}{r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r(n-r)^m\binom{n}{r}$$

* حل أسئلة دورة فصل ثاني 2012/2013 :

أوجد:

1) $card\{(x,A) : x\in[6], A\subset[6]\}$

$= card(X_1)$;

$X_1 = \{(x,A) : x\in[6] \wedge A\in P([6])\}$

$= [6]\times P([6])$

$|X_1| = |[6]| \times |P([6])| = 6\times 2^6$

2) $card(X_2) = card\{(x_1, x_2, \ldots, x_5, x_6)\in\{0,1\}^6 ;$

$x_1 + \cdots + x_5 = 3\}$

$= \binom{5}{3} \times 2$

عدد طرق اختيار 3 عناصر من 5 عناصر

عدد طرق اختيار العنصر 6 هو 0 أو 1

3) ما هو عدد التطبيقات (التوابع) المتباينة المتزايدة من [5] إلى [8]؟

هو عدد التوابع المتزايدة تماماً من [5] إلى [8] ويساوي $\binom{8}{5}$

4) أوجد: $card\{f : [10] \to \{a,b,c\} ; \overset{-1}{f}(\{b\}) = \phi\}$

$= 2^{10}$

- دورة الفصل الثاني: 2011/2012

1) $card\{A\subset[12] / |A| = 3\} = \binom{12}{3}$

لو كانت $|A| \neq 3$ تكون $2^{12} - \binom{12}{3}$

2) $card\{f : [6] \to [6] :$ تقابل $f\} = 6!$

3) ما هو عدد قوانين التشكيل الداخلي الممكن تعريفها على المجموعة n؟

الحل: قانون التشكيل الداخلي على $[n]$ هو أي تابع من الشكل:

f أو $\star : [n] \times [n] \longrightarrow [n]$

$$(x,y) \longmapsto x \star y = f(x,y)$$

وبالتالي

عدد قوانين التشكيل الداخلي على $[n]$ = $\left| F([n] \times [n], [n]) \right|$

$$= \left| [n] \right|^{\left| [n] \times [n] \right|} = n^{(n^2)}$$

4) ما هو عدد قواسم العدد 1000 (القواسم الصحيحة الموجبة)؟

الحل: $1000 = 10^3 = 2^3 \times 5^3$

كل قاسم لـ 1000 هو من الشكل:

$2^i \times 5^j$ و $0 \leq i \leq 3$

$0 \leq j \leq 3$

⟸ عدد القواسم لـ $1000 = 4 \times 4 = 16$

انتهت المحاضرة الثانية عشر