

28/4/2014

الحاضرة العادية عشر

المبرهنه 1 : لنين  $F: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  كما اخذنا عندنا  
 ① الاك  $A, B \in \text{ob}(\mathcal{F}_1)$  ، التطبيق  $F(A, B): \mathcal{F}_1(A, B) \rightarrow \mathcal{F}_2(F(A), F(B))$  متباين ومقار

② الاك  $N \in \text{ob}(\mathcal{F}_1)$  ،  $M \in \text{ob}(\mathcal{F}_2)$  ،  $F(N) \cong M$  حيث

المبرهنه 2 : لنفرض ان  $F: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  كما اخذنا عندنا  
 عندنا  $G: \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_1$  ،  $\varphi: \mathcal{F}_1 \rightarrow G \circ F$  ،  $\psi: \mathcal{F}_1 \rightarrow F \circ G$  ،  
 وايضا مورفزمات دائريه :

$$F \circ \varphi = \psi \circ F$$

حيث  $F$  بيان  $F$  دالي ثبات الاك  $A, B \in \text{ob}(\mathcal{F}_1)$  فان :

$$F(A, B): \mathcal{F}_1(A, B) \rightarrow \mathcal{F}_2(F(A), F(B))$$

المطلوب : اثبات ان هذا التطبيق متباين ومقار

$$u, v \in \mathcal{F}_1(A, B)$$

$$F(u), F(v) \in \text{Mor}(\mathcal{F}_2)$$

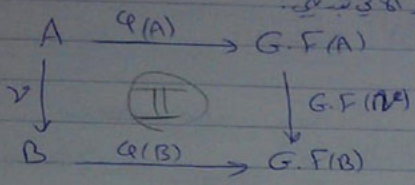
$$G \circ F(u) = G \circ F(v)$$

بيان  $\varphi: \mathcal{F}_1 \rightarrow G \circ F$  مورفزم دالي جابه لاجل المورفزم  $u$   
 المخطط الاتي يبين ذلك :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi(A)} & G \circ F(A) \\ u \downarrow & \textcircled{I} & \downarrow G \circ F(u) \\ B & \xrightarrow{\varphi(B)} & G \circ F(B) \end{array}$$

$$G \circ F(u) \circ \varphi(A) = \varphi(B) \circ u$$

أيضا  $\varphi$  هل المرزيم  $\varphi$  فان المخطط التالي صحيح



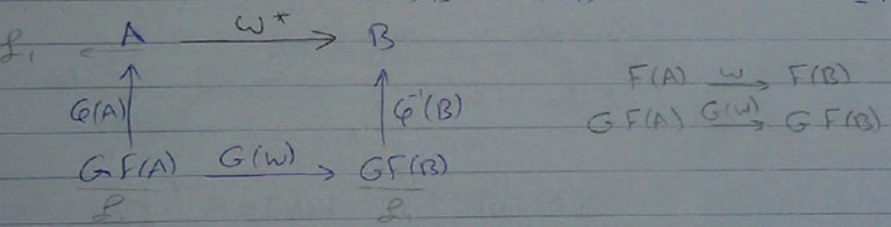
أي  $G.F(\varphi) \cdot \varphi(A) = \varphi(B) \cdot \varphi$

$\varphi^{-1} : G.F \rightarrow \mathcal{I}_B$  : بما ان  $\varphi$  المرزيم فان  $\varphi^{-1}$  هو المرزيم  
 خصولا لكل  $D \in \text{ob}(\mathcal{I}_B)$  فان

$\varphi^{-1}(D) \cdot \varphi(D) = I_D$   
 $\varphi(D) \cdot \varphi^{-1}(D) = I_{G.F(D)}$

$u = \varphi^{-1}(B) \cdot G.F(w) \cdot \varphi(A)$  : من ①  $u = \varphi^{-1}(B) \cdot G.F(w) \cdot \varphi(A)$   
 $v = \varphi^{-1}(B) \cdot G.F(v) \cdot \varphi(A)$  : من ②  $v = \varphi^{-1}(B) \cdot G.F(v) \cdot \varphi(A)$   
 نتج ان  $u = v$  خصوصتا ان ..

$w \cdot F(A) \rightarrow \varphi(B) \in \mathcal{I}_2(F(A), \varphi(B))$  : ليس  
 $A, B \in \text{ob}(\mathcal{I}_1)$  : هي



$w^* = \varphi^{-1}(B) \cdot G(w) \cdot \varphi(A) \in \mathcal{I}_1(A, B)$  : لانه المرزيم

$F(w^*) = w$  : ولانه فان ان

$$F(w^*) = \underbrace{F}_{\text{دالة}} (\underbrace{\varphi^{-1}(B)}_{\text{مجموعة جزئية}} \cdot \underbrace{G(w)}_{\text{عنصر}} \cdot \underbrace{\varphi(A)}_{\text{مجموعة جزئية}})$$

$$= F \varphi^{-1}(B) \cdot F(G(w)) \cdot F(\varphi(A))$$

$\psi: I_A \rightarrow FG$  من مجموعة جزئية إلى مجموعة جزئية  
 $w \in \varphi_1(I(A), \varphi(B))$  و  
 $\varphi(A) \xrightarrow{w \in \varphi_1} \varphi(B)$

$$\begin{array}{ccc}
 \psi(\varphi(A)) \downarrow & & \downarrow \psi(\varphi(B)) \\
 FG\varphi(A) & \xrightarrow{FG(w)} & FG\varphi(B)
 \end{array}$$

$$\boxed{\psi(\varphi(B)) \cdot w = FG(w) \cdot \psi(\varphi(A))}$$

$$\begin{aligned}
 F(w^*) &= F \varphi^{-1}(B) \cdot FG(w) \cdot \psi(\varphi(A)) \\
 &= F \varphi^{-1}(B) \cdot \underbrace{\psi(\varphi(B)) \cdot w}_{\text{عنصر المجموعة الجزئية}} \\
 &= F \varphi^{-1}(B) \cdot \underbrace{F \varphi(B)}_{\text{عنصر المجموعة الجزئية}} \cdot w \\
 &= F(\varphi^{-1}(B) \cdot \varphi(B)) \cdot w \\
 &= F(I_B) \cdot w = I_{F(B)} \cdot w \\
 &= w
 \end{aligned}$$

نظروا عناصر

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{w} & F(B) \\
 & \searrow w & \downarrow I_{F(B)} \\
 & & F(B)
 \end{array}$$

$\forall M \in \text{ob}(\mathcal{F}_2) : \exists N \in \text{ob}(\mathcal{F}_1) \quad F(N) \cong M$  ②  
 لنرى  $M \in \text{ob}(\mathcal{F}_2)$  عندها  
 $G(M) \in \text{ob}(\mathcal{F}_1)$

$$\begin{aligned}
 F(N) &\cong M & N &= G(M) & \text{نظير} \\
 \psi(M) &= FG(M) = F(N) & \Rightarrow & M = F(N)
 \end{aligned}$$

المرهات

لنفرض  $f$  فئة و  $u_1, u_2 : A \rightarrow B$  مورفزمات للفئة  $\mathcal{C}$   
 ولدينا مورفزم للفئة  $f : N \rightarrow A$   
 لنعرف  $X \in \text{ob}(f)$  كالتالي

$$F(X) = \{ u \in f(X, A) \mid u_1 \cdot u = u_2 \cdot u \}$$

إذا كانت التماثل  $(N, f)$  حزمة للمورفزمات  $u_1, u_2$  فإن  $F$  هو دالة  
 صامتة للفئة  $\mathcal{C}$

$F : \text{ob}(f) \rightarrow \text{ob}(\text{Sets})$  لفرض المرهات

$$\forall X \in \text{ob}(f) \quad F(X) = \{ u \mid u_1 \cdot u = u_2 \cdot u \}$$

لنبرهن ان  $F$  تطبيع

لدينا  $X, Y \in \text{ob}(f)$  حيث  $X = Y$

$$F(X) = F(Y)$$

لدينا  $u \in f(X, A) = f(Y, A)$  حيث  $u \in F(X)$   
 كما ان  $u_1 \cdot u = u_2 \cdot u$

أي  $F(X) \subseteq F(Y)$

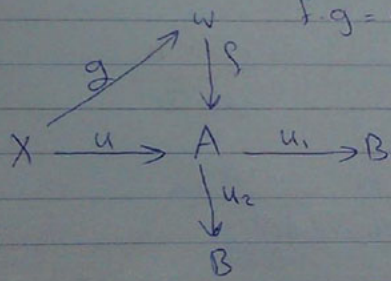
بمضي الطريقة كعادتنا  $F(Y) \subseteq F(X)$

$$\Rightarrow F(X) = F(Y) \Rightarrow \text{تطبيع}$$

$F : \text{Mor}(f) \rightarrow \text{Mor}(\text{Sets})$  لفرض تطبيع

لدينا  $u \in f(X, A)$  لفض  $F(u) = g$

$$f \cdot g = u$$



أثبت ان  $P$  صورة الظالم و  $Q$  صورة العادي

التماثل (المجاورة)