28/4/2014

المحاضرة الحادية عشر

مبرهنة: ليكن $F:\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ تكافؤ فئات عندئذٍ..

① لأجل $A,B\in ob(\mathcal{L}_1)$ ، التطبيق

$F(A,B): \mathcal{L}_1(A,B) \to \mathcal{L}_2(F(A),F(B))$ متباين وغامر

② لأجل $M\in ob(\mathcal{L}_2)$ يوجد $N\in ob(\mathcal{L}_1)$

بحيث $F(N)\cong M$

الإثبات: لنفرض أن $F:\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ تكافؤ فئات..

عندئذٍ يوجد دالي $G:\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$

وايزومورفيزمات داليه:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi: I_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G\circ F \\ \psi: I_{\mathcal{L}_2} \longrightarrow F\circ G \end{array}\right\}$$

بحيث $F.\varphi = \psi.F$

بما أن F دالي فإنه لأجل $A,B\in ob(\mathcal{L}_1)$ فإن:

$F(A,B): \mathcal{L}_1(A,B) \longrightarrow \mathcal{L}_2(F(A),F(B))$ تطبيق

المطلوب: إثبات أن هذا التطبيق متباين وغامر

ليكن $u, v\in \mathcal{L}_1(A,B)$

بحيث $F(u), F(v)\in Mor(\mathcal{L}_2)$

$G.F(u) = G.F(v)$

بما أن $\varphi: I_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G.F$ مورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم u المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(u)"] \\
B \arrow[r, "\varphi(B)"] & G.F(B)
\end{tikzcd}$$

أي أن $G.F(u).\varphi(A) = \varphi(B).u$

أيضاً لأجل المورفيزم v فإن المخطط الآتي تبديلي.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(v)"] \\ B \arrow[r, "\varphi(B)"'] & G.F(B) \end{tikzcd}$$

أي : $G.F(v).\varphi(A)=\varphi(B).v$

بما أن φ ايزومورفيزم طبيعي فإنه يوجد : $\varphi^{-1}: G.F \longrightarrow I_{\mathcal{L}_1}$

يتحقق لأجل كل $D\in ob(\mathcal{L}_1)$ فإن

$$\varphi^{-1}(D)\,\varphi(D)=I_D$$
$$\varphi(D).\,\varphi^{-1}(D)=I_{G.F(D)}$$

من (I) نجد أن : $u=\varphi^{-1}(B).G.F(w).\varphi(A)$

من (II) نجد أن : $v=\varphi^{-1}(B).G.F(v).\varphi(A)$

ينتج أن $u=v$ فهو متباين ..

ليكن $w: F(A)\longrightarrow F(B)\in \mathcal{L}_2(F(A),F(B))$

حيث $A,B\in ob(\mathcal{L}_1)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_1 & A \arrow[r, "w^*"] & B \\ & GF(A) \arrow[u, "\varphi(A)"] \arrow[r, "G(w)"'] & GF(B) \arrow[u, "\varphi^{-1}(B)"'] \\ & \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_1 \end{tikzcd}$$

$$F(A)\xrightarrow{w}F(B)$$
$$GF(A)\xrightarrow{G(w)}GF(B)$$

لنأخذ المورفيزم $w^*=\varphi^{-1}(BG(w)\,\varphi(A)\in \mathcal{L}_1(A,B)$

ولنبرهن على أن $F(w^*)=w$

$$F(w^*) = F(\varphi^{-1}(B) \cdot G(w) \cdot \varphi(A))$$
$$= F\varphi^{-1}(B) \cdot F(G(w)) \cdot F(\varphi(A))$$

من جهة أخرى : بما أن $\psi : I_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow FG$ تحويل طبيعي دالي
و $w \in \mathcal{L}_2(F(A), F(B))$
فإن المخطط التالي تبديلي :

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "w \in \mathcal{L}_1"] \arrow[d, "\psi(F(A))"'] & F(B) \arrow[d, "\psi(F(B))"] \\
FGF(A) \arrow[r, "FG(w)"] & FGF(B)
\end{tikzcd}$$

أي أن :

$$\boxed{\psi F(B) \cdot w = FG(w) \cdot \psi(F(A))}$$

$$F(w^*) = F\varphi^{-1}(B) \cdot FG(w) \cdot \psi(F(A))$$
$$= F\varphi^{-1}(B) \cdot \psi F(B) \cdot w$$ بالاعتماد على العلاقة السابقة
$$= F\varphi^{-1}(B) \cdot F\varphi(B) \cdot w$$
$$= F(\varphi^{-1}(B) \cdot \varphi(B)) \cdot w$$ لأن F تابع
$$= F(I_B) \cdot w = I_{F(B)} \cdot w$$
$$= w$$

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "w"'] & F(B) \arrow[d, "I_{F(B)}"] \\
& F(B)
\end{tikzcd}$$

فهو غامر ...

(2) $\forall M \in ob(\mathcal{L}_2) : \exists N \in ob(\mathcal{L}_1) \quad F(N) \cong M$

ليكن $M \in ob(\mathcal{L}_2)$ عندئذ :

$$G(M) \in ob(\mathcal{L}_1)$$

نضع $N = G(M)$ ، ويبقى إثبات : $F(N) \cong M$

$$\psi(M) = FG(M) = F(N) \Rightarrow M = F(N)$$

مبرهنة ١

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$ مورفيزمات للفئة $\mathcal{L}$.

ولتكن $f : N \to A$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$

أياً كان $X \in ob(\mathcal{L})$ لنعرف

$$F(X) = \{u \in \mathcal{L}(X,A) \; ; \; u_1 . u = u_2 . u\}$$

إذا كانت الثنائية (N, f) نواة للمورفيزمات u_1, u_2 فإن F مودالي مباشر للفئة $\mathcal{L}$.

البرهان: لنعرف $F : ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(Sets)$

$$F(X) = \{u : u_1 . u = u_2 . u\} \quad \forall X \in ob(\mathcal{L})$$

لنبرهن ان F تطبيق..

ليكن $X, Y \in ob(\mathcal{L})$ بحيث $\overline{|X = Y|}$

$F(X) \overset{?}{=} F(Y)$

ليكن $u \in F(X)$ عندئذ $u \in \mathcal{L}(X,A) = \mathcal{L}(Y,A)$

كما أن $u_1 . u = u_2 . u$ ومنه $u \in F(Y)$

أي $F(X) \subset F(Y)$

بنفس الطريقة نجد أن $F(Y) \subset F(X)$

$\Rightarrow F(X) = F(Y) \Rightarrow$ F تطبيق

لنعرف تطبيق: $F : Mor(\mathcal{L}) \longrightarrow Mor(Sets)$

أياً كان $u \in \mathcal{L}(X,A)$ لنضع $F(u) = g$

حيث $f . g = u$

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "f"] & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & B \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

أثبت أن صورة المطابق مطابق

وصورة الجداء ...

انتهت المحاضرة