23/4/2014

المحاضرة التاسعة

المفهوم الاقتصادي للبرنامج المرافق

نوضحه من خلال المثال التالي:

تنتج احدى الشركات نوعين من المنتجات A_1, A_2 ، وتستخدم لذلك نوعين من المواد الأولية ، والمقادير اللازمة من هاتين المادتين لانتاج واحدة من كل من المنتجين A_1, A_2 والكمية الاحتياطية المتوفرة منها والربح العائد لكل واحدة من A_1, A_2 مبينة بالجدول التالي:

المنتجات / المواد الأولية	ما يلزم لانتاج الوحدة الواحدة A_1	A_2	الكميات المتوفرة
B_1	5	10	160
B_2	1	1	24
C_j	90	100	

ما C_j تعني يكون سعر مبيع وممكن يكون ربح

المطلوب:

1- أوجد الخطة الانتاجية المثالية التي تجعل قيمة منتجات هذه الشركة أكبر ما يمكن «سعر المبيع أكبر ما يمكن / الربح العائد أكبر ما يمكن»

2- أوجد النموذج المرافق

3- إذا كان الحل المثالي للنموذج الأصلي هو $x_1^* = 16, x_2^* = 8$ أوجد الحل المثالي للنموذج المرافق

4- ما المفهوم الاقتصادي للبرنامج الأصلي والبرنامج المرافق

5- ما هي العلاقة بين الحلين؟..

نفرض أن x_1 هي الكمية المنتجة من A_1

x_2 " " " A_2

عندئذ بناءً على الجدول: $Z = 90x_1 + 100x_2$

وهو تابع الهدف..

$5x_1 + 10x_2 \leq 160$ شرط المادة B_1 :

$x_1 + x_2 \leq 24$ شرط المادة B_2 :

$x_1 , x_2 \geq 0$ شروط عدم السلبية :

وعليه يكون النموذج :

أوجد $Z = 50x_1 + 100x_2 \longrightarrow Max$

ضمن الشروط

$u_1 \quad 5x_1 + 10x_2 \leq 160$

$u_2 \quad x_1 + x_2 \leq 24$

$x_1 , x_2 \geq 0$

2 - النموذج المرافق :

$L = 160u_1 + 24u_2 \longrightarrow Min$

ضمن الشروط : $5u_1 + u_2 \geq 90$

$10u_1 + u_2 \geq 100$

$u_1 , u_2 \geq 0$

3 - $x_1^* = 16 \quad , \quad x_2^* = 8$

$90 * 16 + 100 * 8 = 2240 = L$

لإيجاد حل النموذج المرافق : من العلاقتين (*) .

$x_j (\sum a_{ij} y_i - c_j) = 0 \quad j = \overline{1,n}$

نجد $u_1^* = 2$

$u_2^* = 8$

$x_1 (a_{11} y_1 + a_{21} y_2 - c_1) = 0$

$x_2 (a_{12} y_1 + a_{22} y_2 - c_2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 16 (5u_1 + u_2 - 90) = 0 \\ 8 (10u_1 + u_2 - 100) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 80u_1 + 16u_2 - 1440 = 0 \\ \underline{80u_1 + 8u_2 - 800 = 0} \\ 0 + 8u_2 - 640 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow u_2 = \frac{640}{8} = 80$

$\Rightarrow u_1 = 20$

?

4 - إن متحولات التابع الأصلي هي كميتي الإنتاج x_1, x_2 من A_1, A_2
وإن هذه الكميات مضروبة بالأسعار تعطينا المنتجات
(وهذه الكميات مضروبة بالربح تعطينا ربح الشركة)

إن المتحولات في تابع الهدف في النموذج المرافق هي عبارة عن الأسعار u_1, u_2
لواحدات المواد الأولية (أي التكلفة) B_1, B_2 وهذه الأسعار
مضروبة بالكميات الموجودة تعطينا قيمة المواد الموجودة (تكلفة إنتاج المنتج)
ولهذا تسمى هذه المتحولات بالأسعار السرية (أسعار الظل)

إن المتراجحة الأولى في النموذج المرافق تعني أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة واحدة
من المنتج A لا يمكن أن تقل عن سعر الوحدة الواحدة من هذا المنتج
وأن المتراجحة الثانية من النموذج المرافق تعني أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة
واحدة من المنتج A_2 لا يمكن أن تقل عن سعر الوحدة الواحدة من هذا المنتج.

إن النموذج الأصلي يعطينا أفضل خطة للإنتاج والتي تجعل ذلك الإنتاج أكبر ما يمكن
والحل المثالي للنموذج المرافق يعطينا أفضل تشكيلة لأسعار المواد الأولية..
العلاقة بين الحلين: $Max\ Z = Min\ L$
الحلين يعطيان نفس القيمة لتابعي الهدف.

تتمة في موضوع نظرية الالعاب

الحل المثالي للعبة

لإيجاد الحل المثالي لأي لعبة علينا قبل كل شيء أن نميز بين الالعاب المستقرة والالعاب غير المستقرة ..

١- الحل المثالي للألعاب المستقرة:
هو الحل الذي يعطينا أكبر ربح ممكن بالنسبة لـ A، يتم الحصول عليه من خلال الثمن الادنى والثمن الأقصى وتحديد الاستراتيجيات المستقرة لكل طرف والمقابلة للثمن المستقر كما فعلنا في المثال السابق..

2- الحل المثالي للألعاب غير المستقرة:
يتم الحصول على هذا الحل بدلالة مختلف الاستراتيجيات الممكنة حيث أن حل اللعبة يتضمن عدداً من الاستراتيجيات المنفردة لكل طرف من طرفيها ويتم تبني كل استراتيجية منها وفق توزيع احتمالي معين أو وفق نسب يجب حسابها.

يعود سبب اللجوء إلى إيجاد الحل بواسطة الاستراتيجيات المركبة هو تحقيق أكبر ربح ممكن

- نجد في المثال السابق أن الطرف A يبحث عن طريقة لاستخدام استراتيجيات عدة من خلال عملية سير اللعب تحقق له ربحاً V .. أكبر من الربح α المضمون.. والذي سيحققه إذا تبنى استراتيجية الثمن الأدنى..
- كذلك نجد أن B يعمل جاهداً لمنع A من الوصول إلى غايته، ويسرع بالبحث عن طريقة لاستخدام عدة استراتيجيات تجعل ربح A أقل من الحد الأقصى β وتجعله أقل ما يمكن، وهكذا

هذا يعني أن كل منهما يجب أن يبحث عن قانون التوزيع الاحتمالي الذي يجب أن يطبقه وفقه كل من استراتيجياته حتى يحقق غايته

ويكون التعبير الرياضي عن الحل بواسطة الاستراتيجيات المركبة على الشكل التالي:

إن A يبحث عن التوزيع الاحتمالي: $P_A : P_1, P_2, \dots P_m$

والمقابل للاستراتيجيات: $A_1, A_2, \dots A_m$

الذي يجعل ربحه أكبر ما يمكن..

وإن B كذلك يجب أن يبحث عن التوزيع الاحتمالي:

$$Q_B : q_1 , q_2 , \ldots , q_n$$
$$B_1 , B_2 , \ldots , B_n$$

والمقابل للاستراتيجيات.
ليجعل ربح A أصغر ما يمكن وبالتالي يجعل ربحه أكبر ما يمكن
مع العلم أن كل من الاحتمالات P_i ، والاحتمالات q_j يحقق العلاقات التالية

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1 \quad \text{و} \quad 0 \le P_i \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \quad \text{و} \quad 0 \le q_j \le 1$$

وبذلك نكون قد حولنا مسألة البحث عن الحل المثالي للعبة إلى عملية البحث عن
قانون التوزيع الاحتمالي $P_A : P_1 , P_2 , \ldots P_m$
الذي يجب على الطرف A أن يعمل وفقه حتى يحقق أكبر ربح ممكن ونرمز له بالرمز P_A
ونرمز أيضاً لقانون التوزيع الاحتمالي الموافق لـ B بـ Q_B

بعد حساب كل من P_A ، Q_B فإن كل من الطرفين سيتبنى استراتيجية المفردة
في كل خطوة من خطوات اللعب وفقاً لقانون التوزيع الاحتمالي الخاص به.
ويتم تحديد الاستراتيجية المفردة في كل خطوة بواسطة جداول أرقام عشوائية
أو بشبه عشوائية خاصة للتوزيع المذكور

سنطلق اسم الاستراتيجيات الفعالة على الاستراتيجيات المستخدمة وهي التي
لا تكون قيمة الاحتمال المقابلة لها تساوي الصفر
مع الإشارة إلى أنه إذا كانت إحدى أو بعض قيم التوزيع الاحتمالي مساوية للصفر
هنا يعني أن الاستراتيجية المقابلة غير فعالة .. ولا تدخل في عداد الاستراتيجيات
الفعالة .. ولا تستخدم في عملية اللعب.

نطلق اسم الاستراتيجية المركبة المثالية على الاستراتيجية التي تقبل التوزيع الاحتمالي المثالي ، ونرمز لها بالثنائية (P_A^*, A)

وهي الاستراتيجية المركبة التي تعطينا أكبر ربح لـ A ..

ملاحظة: يجب أن نناقش موضوع الربح الذي نحصل عليه من جراء تطبيق أية استراتيجية مركبة ..

إن متوسط الربح الذي يحققه A عند تطبيقه أية استراتيجيات مركبة وعندما يقابله B بتطبيق استراتيجية وحيدة منفردة B_j يساوي التوقع الرياضي للأعداد a_{ij} الواقعة في العمود B_j والخاضعة لقانون التوزيع P_A

إن متوسط الربح الذي سنرمز له بالرمز a_j

$$a_j = P_1 a_{1j} + P_2 a_{2j} + \dots + P_m a_{mj}$$

حيث أن a_j هو عبارة عن الربح الشرطي المقابل للاستراتيجية B_j فقط

لنفترض الآن أن B أصبح يطبق استراتيجيات مركبة وفق التوزيع الاحتمالي Q_B عندئذ يكون الربح الذي سيحصل عليه الطرف A سيكون مساوياً للتوقع الرياضي للمقادير A_j الخاضعة للتوزيع Q_B وسنرمز للربح A في هذه الحالة:

$$a = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \dots + q_n a_n$$

حيث أن a هو متوسط الربح الذي يحققه A إذا طبق كلا من الطرفين A, B استراتيجية مركبة مختلفة حسب قانون توزيع احتمالي معين لكل منهما مع ملاحظة أن هذا الربح قد لا يساوي ثمن اللعبة γ الذي ينتج عن تطبيق كل من طرفي اللعبة الاستراتيجيات المركبة المثالية أي: P_A^* ، Q_B^*

لأنه إذا كان كل من اللاعبين يطبق استراتيجية المركبة المثالية فإن $a = \gamma$

SABBAGH STATIONERY

نظريات مختلفة

نظرية 1 / لكل لعبة منتهية حل مثالي واحد على الأقل بواسطة الاستراتيجيات المركبة

نظرية 2 / لكل لعبة منتهية ثمن v يحقق المتراجحة التالية:

$$\alpha \leq v \leq \beta$$

حيث α ، β الثمن الأدنى والثمن الأقصى و v هو الثمن الحقيقي ..

نظرية 3 / إذا التزم أحد الطرفين باستراتيجيته المركبة المثالية فإن مقدار ما يربحه يبقى ثابتاً ومساوياً لثمن اللعبة v ، ذلك لأن الطرف الآخر لا يخرج عن استراتيجيته الفعالة ..

انتهت المحاضرة