10/4/2011

المحاضرة السابعة

بعض النماذج اللاخطية

نموذج نقل المواد بأقصر فترة زمنية «من نماذج النقل»

يختلف هذا النموذج عن النماذج السابقة بأنه يهدف لنقل كافة الكمية من مراكز الانتاج (التوزيع) الى مراكز الاستهلاك بأقصر فترة زمنية ممكنة

ونصادف مثل هذه المسائل عند وضع خطط نقل المواد سريعة العطب كالحليب والأدوية والأغذية..

كذلك عند وضع خطط لتأمين الذخائر القتالية في حالة الحرب حيث يكون الهدف هو النقل بأسرع ما يمكن وأقل كلفة ممكنة..

نصيغ المسألة ونموذجها الرياضي على الشكل التالي:

المسألة:

لنفرض أنه لدينا m مركزاً لتصدير مادة ما.

وطاقات تلك المراكز محددة بالكميات التالية: $a_1, a_2, \dots, a_m$

وأنه لدينا n مركز استهلاكي

متطلباتها محددة من تلك المادة بالكميات: $b_1, b_2, \dots, b_n$

ونفرض أن $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

كما نفترض أن مصفوفة الأزمنة اللازمة لنقل الكمية الموجودة من المركز i إلى المركز j معلومة ونساوي $\{t_{ij}\}$.

نفرض $\boxed{x_{ij}}$ مقدار ما يجب نقله من المركز i إلى المركز j عندئذ نجد:

«شروط المسألة»

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = \overline{1,m} \; , \; j = \overline{1,n}$$

أما تابع الهدف فلا يمكن استغلاله على شكل تابع رياضي ولكننا نستطيع
أهم صفاته وخواصه.
نعلم أن أي خطة للنقل $\{x_{ij}\}$ لا تتضمن غير $m+n-1$ خلية قاعدية غير معلوم
وأنه مقابل أي خطة مقبولة x_{ij} يوجد جملة من الأزمنة t_{ij} نرمز لها $[t_{ij}]_x$
لا تعتبر منفذة إلا إذا كانت قد نفذت عناصرها.
وبذلك فإن مدة تنفيذ الخطة والتي نرمز لها بالرمز t_x تساوي أكبر عنصر
في الجملة $[t_{ij}]_x$ وبذلك فإن $t_x = Max\ [t_{ij}]_x$
وبما أنه لدينا عدد كبير من الخطط القاعدية فإن الخطة المثالية:

$$\cancel{t_x^* = Max\ [t_{ij}]_x}$$

$$t_x^* = Min\ t_x$$

$$t_x^* = Min\left(\underset{i\ j}{Max}\ [t_{ij}]_x\right)$$

وهو تابع الهدف..
توجد بعض النماذج اللاخطية والتي يمكن تحويلها إلى نماذج خطية كما في المثال التالي:

$\boxed{\text{مسألة}}$ توجد في ورشة ميكانيكية آلة تثقب بالضغط و 5 آلات خرز وخراطة.
وتستخدم هذه الآلات لإنتاج قطع مجمعة من جزئين 1 ، 2
وتعطى إنتاجية كل من الآلات لأي من الجزئين بالجدول التالي:

الجزء	زمن الإنتاج دقيقة / جزء	
	الثقب	الخرز والخراطة
x_1 1	3 دقائق	20 دقيقة
x_2 2	5 دقائق	15 دقيقة

نرغب بالمحافظة على أعباء عمل متوازنة بين الآلات بحيث لا تعمل أي آلة ما يزيد عن
30 دقيقة في اليوم عن بقية الآلات..

نفرض أن أعمال الفرز والخراطة توزع على نحو متساوي بين آلات الفرز والخراطة الخمس

ونفرض أن طول يوم العمل العادي 8 ساعات.

<u>المطلوب</u>: تقسيم زمن عمل الآلة للحصول على العدد الأعظمي من القطع المجمعة

8 ساعات عمل = $8 \times 60 = 480$ دقيقة عمل في اليوم

نفرض $\boxed{x_1}$ عدد الأجزاء الأولى المنتجة يومياً من القسم الأول

$\boxed{x_2}$ " " الثانية " " الثاني

• عبء العمل على آلة الفرز والخراطة: $\frac{20x_1 + 15x_2}{5}$

$20x_1 + 15x_2$ ← الوقت اللازم لإنتاج 1 و 2

5 ← عدد الآلات لأننا نحسب من أجل الآلة الواحدة

أي: $\boxed{4x_1 + 3x_2 \le 480}$

• عبء العمل على آلة الثقب: $\boxed{3x_1 + 5x_2 \le 480}$

• ويمكن تمثيل قيد التوازن على أعباء عمل الآلات بالشكل التالي

$$|(4x_1 + 3x_2) - (3x_1 + 5x_2)| \le 30$$

قيمة مطلقة لا نستعمل إلا زمن موجب

$$|3x_1 - 2x_2| \le 30$$

هذا القيد غير خطي ويمكن استبداله بالقيدين الخطيين التاليين:

$$-30 \le 3x_1 - 2x_2 \le 30$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_1 - 2x_2 \le 30}$$

$$\boxed{2x_2 - x_1 \le 30}$$

تابع الهدف: لما كان عدد القطع المجمعة لا يمكن أن يتجاوز العدد الأصغر من أجزاء 1 و 2 المنتجة، فيعبر عن تابع الهدف بجعل القيمة Z أعظمية حيث $Z = y$

و $y = \text{Min}(x_1, x_2)$

إذاً أصبح النموذج على الشكل التالي:

النموذج الرياضي:

أوجد القيمة الأعظمية للتابع z مساوياً لـ y ضمن الشروط:

$$4x_1 + 3x_2 \le 420$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 480$$
$$x_1 - 2x_2 \le 30$$
$$2x_2 - x_1 \le 30$$
$$y \le x_1$$
$$y \le x_2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

النماذج الخطية المترافقة

إن لكل نموذج خطي نموذج خطي مرافق حيث أنه إذا أوجد حلاً لإحدى النموذجين هناك حل للآخر .. حيث تتساوى قيمة تابع الهدف للنموذجين عند الحل الأمثل قد تكون الحاجة لإيجاد النموذج المرافق ضرورية في العديد من المسائل وخاصة في الحالة التي تكون فيها عدد الشروط أقل من عدد المتغيرات..

تشكيل النموذج المرافق:

نفرض أنه لدينا نموذج خطي يتكون من تابع هدف في صورة تعظيم وشروط جميعها أصغر أو يساوي ، ندعوه البرنامج الأصلي ولنأخذ الشكل التالي:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow Max \quad = \left(\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow Max\right)$$

ضمن الشروط:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = \overline{1,n}$$

فيكون البرنامج المرافق له:

$$L = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \longrightarrow Min$$
$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$
$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

ملاحظة: يمكن تشكيل نموذج مرافق لأي نموذج خطي
يمكن اعتبار النموذج الثاني نموذج أصلي، في هذه الحالة يكون النموذج الأول نموذج مرافق.

طريقة بناء النموذج المرافق

1 _ إذا كان تابع الهدف في النموذج الاصلي بصورة تعظيم (تقليل)
فإن تابع الهدف في النموذج المرافق بصورة تقليل (تعظيم).
2 _ تقابل كل شرط او قيد في البرنامج الاصلي متغيراً في النموذج المرافق
وتقابل كل شرط او قيد في البرنامج المرافق متغيراً في النموذج الاصلي
3_ اذا كان تابع الهدف في أي من النموذجين بصورة تعظيم فإن القيود تكون بصورة (أقل او يساوي) ، واذا كانت تابع الهدف بصورة تقليل فإن القيود تكون بصورة (أكبر او يساوي)..
4 _ معاملات تابع الهدف في النموذج المرافق هي قيم الطرف الأيمن لشروط النموذج الاصلي
وقيم الطرف الأيمن لشروط النموذج المرافق هي معاملات تابع الهدف في النموذج الأصلي.
5_ اذا كان عدد القيود m وعدد المتحولات n في النموذج الاصلي
فإن عدد " تصبح n و " m " " المرافق
6_ معاملات المتحولات في الشروط للنموذج المرافق هي نفسها معاملات المتحول في الشروط للنموذج الأصلي مع تبديل معاملات الاسطر والاعمدة . هذا يعني ان معاملات السطر i في الشروط للنموذج الاصلي هي نفسها معاملات العمود i في الشروط للنموذج المرافق

		النموذج الأصلي				الطرف الأيمن	تابع الهدف للمرافق
		x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\leq$	
النموذج المرافق	y_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1	$b_1 y_1$
	y_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2	$+ b_2 y_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$+ \vdots$
	y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m	$+ b_m y_m$
الطرف الأيمن $\geq$		c_1	c_2	$\dots$	c_n		
تابع الهدف الأصلي		$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$					

مثال: نفرض لدينا النموذج الخطي التالي:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \geq b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

المطلوب: أوجد النموذج المرافق للنموذج السابق.

أولاً سنجري بعض التعديلات على النموذج الأصلي:

- نضرب القيد الثاني بـ (−1) لتصبح المتراجحة أصغر أو تساوي وذلك لتوافقه Max

فيصبح القيد: $-a_{21} x_1 - a_{22} x_2 - a_{23} x_3 \leq -b_2$

- نحول المساواة في القيد الثالث الى متراجحتين على الشكل

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \leq b_3$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \geq b_3$$

$$-a_{31} x_1 - a_{32} x_2 - a_{33} x_3 \leq -b_3$$

$$\begin{array}{l|l}
y_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\
y_2 & -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \le -b_2 \\
y_3^+ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3 \\
y_3^- & -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \le -b_3
\end{array}$$

نعيد كتابة القيود بوضعها الجديد:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

يصبح تابع الهدف:

$$L = b_1 y_1 - b_2 y_2 + b_3 y_3^+ - b_3 y_3^- \longrightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$a_{11} y_1 - a_{21} y_2 + a_{31} y_3^+ - a_{31} y_3^- \geq c_1$$
$$a_{12} y_1 - a_{22} y_2 + a_{32} y_3^+ - a_{32} y_3^- \geq c_2$$
$$a_{13} y_1 - a_{23} y_2 + a_{33} y_3^+ - a_{33} y_3^- \geq c_3$$
$$y_1, y_2, y_3^+, y_2^- \geq 0$$

أمثلة حل: أوجد النموذج المرافق للنموذج التالي:

$\boxed{1}$ $$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\begin{array}{l|l}
y_1^+ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\
y_1^- & -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \le -b_1 \\
y_2^+ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \\
y_2^- & -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \le -b_2
\end{array}$$

$$L = b_1 y_1^+ - b_1 y_1^- + b_2 y_2^+ - b_2 y_2^- \longrightarrow Min$$

$$a_{11} y_1^+ - a_{11} y_1^- + a_{21} y_2^+ - a_{21} y_2^- \geq c_1$$
$$a_{12} y_1^+ - a_{12} y_1^- + a_{22} y_2^+ - a_{22} y_2^- \geq c_2$$
$$a_{13} y_1^+ - a_{13} y_1^- + a_{23} y_2^+ - a_{23} y_2^- \geq c_3$$

y_1^+, y_1^-
y_2^+, y_2^- ≥ 0

2

$$L = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow Min$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

بالعمل على القيود بحيث توافق Min :

$$\begin{array}{c|l} y_1 & -x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -4 \\ y_2 & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 2 \end{array}$$

دالة الهدف

$$Z = -4y_1 + 2y_2 \Longrightarrow Max$$

ضمن القيود :

$$-y_1 + y_2 \le 3$$

$$-y_1 + 4y_2 \le 2$$

$$-2y_1 + 3y_2 \le 5$$

$$y_1, y_2 \ge 0$$

نظريات مختلفة حول الترافق :

1. إن النموذج المرافق للنموذج المرافق هو النموذج الأصلي نفسه
2. إذا كان $x_1, \dots, x_n$ حلاً مقبولاً للنموذج وكان $y_1, \dots, y_n$ حلاً مقبولاً للنموذج المرافق
فإن قيمة تابع الهدف في النموذج الأصلي لا تتجاوز قيمة تابع الهدف في النموذج المرافق وذلك من أجل جميع الحلول المقبولة باعتبارها الحل الأمثل

3. إذا كان تابع الهدف في أحد النموذجين غير محدود (ليس له حل أمثل) فإن النموذج الآخر يكون غير قابل للحل لتعارض الشروط.

4. إذا كان لأحد النموذجين المترافقين حل مثالي محدود فإن للنموذج الآخر حل مثالي محدود قيمة تابعي الهدف المحدودين متساويتين $Max\,Z = Min\,L$

⑤ الشرط اللازم والكافي ليكون الحلين المقبولين $y'_1, \dots, y'_m$ ، $x'_1, \dots, x'_n$

حلين مثاليين للنموذج الأصلي ومرافقه

هو أن تكون قيمتا تابعي الهدف لهما متساويتان وأن يحققا الشرطين التاليين:

$$(*)\begin{cases} 1)\ x'_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y'_i - c_j \right) = 0 & j = \overline{1,n} \\ 2)\ y'_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x'_j - b_i \right) = 0 & i = \overline{1,m} \end{cases}$$

هذا يعني أنه يلزم ويكفي أن يكون أحد الجدائين مساويا الصفر في كل من العلاقتين 1 ، 2

بعبارة أخرى: إذا كانت قيمة أي مركبة من مركبات الحل المثالي x'_j لا تساوي الصفر في النموذج الأصلي فإن الحل المثالي للنموذج المرافق يجعل المتراجحة المقابلة لذلك المتحول x'_j مساواة تامة

المضمون الاقتصادي للبرنامج المرافق..

نوضحه من خلال المثال التالي:

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات A_1 ، A_2 وتستخدم لذلك نوعين من المواد الأولية ، وإن المقادير اللازمة من هاتين المادتين لإنتاج واحدة من كل من المنتجين A_1 ، A_2 والكمية الاحتياطية المتوفرة منها ، وسعر المبيع لكل واحدة من A_1 ، A_2 مبينة بالجدول:

المنتجات / المواد الأولية	ما يلزم لإنتاج وحدة واحدة		الكميات المتوفرة
	A_1	A_2	
B_1	5	10	160
B_2	1	1	24
c_j	90	100	

المطلوب:

1ـ أوجد الخطة الانتاجية المثالية التي تجعل مبيعات منتجات هذه الشركة (سعر البيع) أكبر ما يمكن..

2ـ أوجد النموذج المرافق.

3ـ إذا كان الحل المثالي للنموذج الأصلي هو

$x'_1 = 16$

$x'_2 = 8$

$z = 2240$

أوجد الحل المثالي للنموذج المرافق

ثم المضمون الاقتصادي للبرنامج الأصلي والبرنامج المرافق وما العلاقة بين الحلين..

أترك الحل

نفرض x_1 الكمية المنتجة من A_1

x_2 " " " A_2

قيمة المنتجات أكبر ما يمكن: $Z = 90x_1 + 100x_2 \longrightarrow Max$

$y_1 | \quad 5x_1 + 10x_2 \leq 160$

$y_2 | \quad x_1 + x_2 \leq 24$

النموذج المرافق

$L = 160y_1 + 24y_2 \longrightarrow Min$

$5y_1 + y_2 \geq 90$

$10y_1 + y_2 \geq 100$