الموضوع: خواص تكامل استيلجس.

- تعريف تكامل استيلجس
- شروط وجود تكامل استيلجس
- خواص تكامل استيلجس.
- مبرهنات لحساب تكامل استيلجس.
- التأويل الهندسي لتكامل استيلجس
- أمثلة.

- تعريف: إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين معرفتين ومحدودتين على المجال $[a,b]$ عندئذٍ نقول أن f قابل للمكاملة بالنسبة لـ g (وفق g) إذا وجد $A \in \mathbb{R}$ حيث يحقق:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta g(x_k)}_{\text{مجموع استيلجس}} = A$$

نرمز لـ A بتكامل استيلجس لـ f على g بالشكل $\int_a^b f \, dg$

$$\Delta x = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k \quad , \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1})$$

$$t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\dots < x_n = b\}$$

- خواص تكامل استيلجس:

1) $\int_a^b 1 \, d(g(x)) = g(b) - g(a)$

2) $\int_a^b (f_1(x) \mp f_2(x)) \, d(g(x)) =$

$$\int_a^b f_1(x) \, d(g(x)) \mp \int_a^b f_2(x) \, d(g(x))$$

3) $\int_a^b f(x)\, d[g_1(x) \mp g_2(x)] =$

$$\int_a^b f(x)\, d(g_1(x)) \mp \int_a^b f(x)\, d(g_2(x))$$

4) $\int_a^b \alpha f\, d(\beta g(x)) = \alpha\beta \int_a^b f\, d(g(x))$; $\alpha, \beta \in R$

5) إذا كانت الدالة $g(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$ وكان التكاملان:

$$\int_a^b f(x)\, d(g(x)) \ , \ \int_a^b h(x)\, d(g(x))$$

موجودين:

فإذا كان: $f(x) \leq h(x)$ $\forall x \in [a,b]$ عندئذ:

$$\int_a^b f(x)\, d(g(x)) \leq \int_a^b h(x)\, d(g(x))$$

6) إذا كانت الدالة $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$ وإذا كان $\int_a^b f\, dg$

موجوداً عندئذ:

$\int_a^b |f(x)|\, d(g(x))$ موجود

و

$\int_a^b f^2(x)\, d(g(x))$ موجود

وتتحقق العلاقة:

$$\left| \int_a^b f\, dg \right| \leq \int_a^b |f|\, dg$$

ملاحظة: $\int_a^b |f|\, dg$ موجود $\not\Rightarrow$ $\int_a^b f\, dg$ موجود

7) إذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$ وكان $\int_a^b f\, dg$ موجوداً فإن التكاملين:

$$\int_a^c f\, dg \ \wedge \int^b f\, dg$$

موجودان حيث $a < c < b$ ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً

8) إذا كان التكاملان $\int_a^c f dg$ و $\int_c^b f dg$ موجودين حيث $a < c < b$ وكان أحد التابعين f أو g مستمراً عند c والآخر محدوداً في جوار c فإن $\int_a^b f dg$ يكون موجوداً وتحقق العلاقة.

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$

9) نظرية التكامل بالتجزئة:
إذا كان أحد التكاملين $\int_a^b f dg$ و $\int_a^b g df$ موجوداً فإن التكامل الآخر يكون موجوداً وتتحقق العلاقة:

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = [f(x) . g(x)]_a^b$$

$$= f(b) . g(b) - f(a) . g(a)$$

10) إذا كانت الدالة f مستمرة على $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ د. ت. م على $[a,b]$ فإن:

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} | f(x) | . \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x)$$

- مبرهنات لحساب تكامل استيلجس:

تمهيد:

تعريف الدالة الدرجية:

- إذا كانت الدالة $g(x)$ معرفة على المجال $[a,b]$ وتعاني انقطاعات في عدد منته من النقاط ولتكن $c_1, c_2, ..., c_n$ حيث:

$$a \leq c_1 < c_2 < .... < c_n \leq b$$

فإذا كانت $g(x)$ ثابتة في كل مجال مفتوح $] c_k , c_{k+1} [$ فإننا ندعو الدالة $g(x)$ دالة درجية.

$$g(c_k) = g(c_k + 0) - g(c_k - 0)$$

« مقدار طول القفزة »

مبرهنة (1): إذا كانت الدالة $g(x)$ دالة درجية معرّفة على المجال $[a,b]$ وكانت $c_1, c_2, \dots, c_n$ نقاط انقطاع لهذه الدالة. g_k القفزة عند c_k وكانت f محدودة (معرّفة على) $[a,b]$ بحيث لا تكون g, f غير مستمرتين معاً عند c_k (من اليمين أو من اليسار) عندئذٍ $\int_a^b f\,dg$ يكون موجوداً ويعطى بالشكل:

$$\int_a^b f\,dg = f(a)[g(a+0)-g(a)] + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot g(c_k) + f(b)[g(b)-g(b-0)]$$

مبرهنة (2): إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ تعاني عدد منتهٍ من نقاط الانقطاع $a \le c_1 < c_2 < \dots < c_n \le b$ من النوع الأول ولنفرض أن $g'(x)$ موجود على المجال $[a,b]$ باستثناء عدد منتهٍ من النقاط وبحيث يكون: $\int_a^b |g'(x)|\,dx < \infty$ عندئذٍ تكامل استيلجس يكون موجوداً ويعطى بالعلاقة:

$$(S)\int_a^b f\,dg = (R)\int_a^b f\cdot g'\,dx$$

$$+ f(a)[g(a+0)-g(a)] + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot g(c_k) + f(b)[g(b)-g(b-a)]$$

تمرين [ترك كتمرين للقارئ]

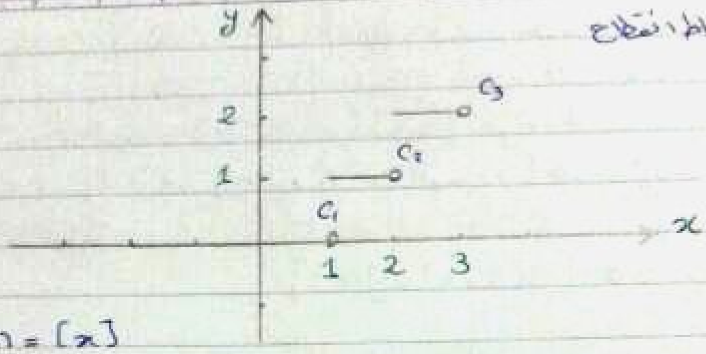
$$I = \int_{-2}^{2} x^2\,d\,g(x) \;;\; g(x) = \begin{cases} x+2 & ; -2 \le x < -1 \\ 2 & ; -1 \le x < 0 \\ x^2+3 & ; 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

مثال توضيحي: احسب:

$$I = \int^3 x^2\,d[x]$$

الحل: قبل البدء بالحل سنعرّف الدالة $[x]$ على المجال المطروح:

نقاط انقطاع : c_1, c_2, c_3



$n = [x]$

$n \leq x < n+1$ $\qquad$ $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 3$

$0 \leq x < 1$ $\qquad$ $g_1 = g(1+0) - g(1-0)$

$1 \leq x < 2$ $\qquad$ $g_1 = 1 - 0 = 1$

$2 \leq x \leq 3$

نلاحظ أن $[x]$ دالة درجية كل قفزة من قفزاتها بمقدار (1)
وتعرف كما يلي :

$$[x] = \begin{cases} -1 & ; \quad x \in [-1, 0[\\ 0 & ; \quad x \in [0, 1[\\ 1 & ; \quad x \in [1, 2[\\ 2 & ; \quad x \in [2, 3[\\ \vdots & \end{cases}$$

- بتطبيق المبرهنة السابقة نجد :

$$\int_0^3 x^2 \, d[x] = f(0)[g(a+0) - g(a)] + \sum_{k=1}^{3} f(c_k).g(c_k) + f(3).[g(3) - g(3-0)$$

نلاحظ أن :

$c_1 = \quad ,\ c_2 = \quad ,\ c_3 = 3$ $\qquad$ هي نقاط الانقطاع

وبالتالي نجد :

$f(0) = 0,\ f(3) = 9,\ g(1) = g(1+0) + g(1-0)$

$= 1 - 0 = 1$

$g(2) = g(2+0) - g(2-0)$
$= 2 - 1 = 1$

$g(3) = g(3+0) - g(3-0) = 3 - 2 = 1$

$g(b) - g(b-0) = g(3) - g(3-0) = 1 - 2$

$g(3+0) - 2g(3-0)$
$3 - 2(2)$
-1
$= -1$

$I = \int_0^3 x^2 d_3 [x] = f(1) + f_3(2) + f(3) = 1 + 4 + 9 = 14$

$\to I = (5) \int_0^3 x^2 d[x] = \int_0^3 \varphi(x)\, dx = 14$

$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$

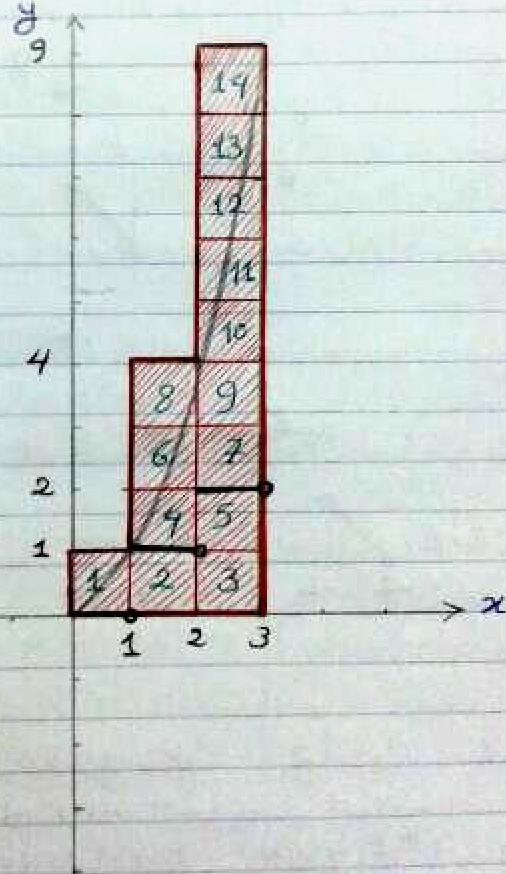
$y = t^2$

$x = [x]$

$t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$t_0 = 1, \ t_1 = 2, \ t_3 = 3$

نقاط الانقطاع يجب أن نأخذها من اليمين ومن اليسار



$t_0 = 1 \to (0, 1), (1, 1)$

$t_1 = 2 \to (1, 4), (2, 4)$

$t_2 = 3 \to (2, 9), (3, 9)$

النكتة الجاهزة الحادية عشرة