المحاضرة الخامسة 31/3/2014

تعريف « المورفيزمات بين الدوال »

ليكن $F, G : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_1$ دوال مباشرة

نقول أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $f : F \to G$

إذا تحقق: أيا كان $A \in ob(\mathcal{L})$ ، يوجد مورفيزم

$$f(A) : F(A) \to G(A)$$

ويحقق ما يلي: $F(A), G(A) \in ob(\mathcal{L}_1)$ و $f(A) \in \mathcal{L}_1(F(A), G(A))$

أيا كان $u : A \to B \in \mathcal{L}(A,B)$ المخطط الآتي تبديلي:

$u : A \to B$ حيث
$F(u) : F(A) \to F(B)$
$G(u) : G(A) \to G(B)$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "f(B)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

أي: $f(B) . F(u) = G(u) . f(A)$

- نقول عن المورفيزم الدالي $f : F \to G$ إنه إيزومورفيزم إذا كان المورفيزم $f(A) : F(A) \to G(A)$ إيزومورفيزم وذلك $\forall A \in ob(\mathcal{L})$

تعريف

ليكن $F, G : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_1$ دوال غير مباشرة

نقول أنه يوجد مورفيزم دالي $f : F \to G$

إذا تحقق: أيا كان $A \in ob(\mathcal{L})$ ، يوجد مورفيزم

$$f(A) : F(A) \to G(A)$$

ويحقق ما يلي:

أيا كان $u : A \to B \in \mathcal{L}(A,B)$ المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] & G(A) \\ F(B) \arrow[r, "f(B)"] \arrow[u, "F(u)"] & G(B) \arrow[u, "G(u)"'] \end{tikzcd}$$

أي $G(u) . f(B) = f(A) . F(u)$

SARRAGH STATIONERY

ونقول عن المورفيزم الدالي $f: F \to G$ إنه إيزومورفيزم

إذا كان المورفيزم $f(A): F(A) \to G(A)$ إيزومورفيزم

وذلك لأي كان $A \in ob(\mathcal{C})$

$\boxed{\text{تمهيدية}}$

ليكن $\mathcal{C}$ فئة و $u: X \to X'$

مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ حيث $X, X' \in ob(\mathcal{C})$

عندئذ: (1) يوجد مورفيزم دالي $f: h_{X'} \to h_X$ المخطط

(2) يوجد مورفيزم دالي $g: \hat{h}_X \to \hat{h}_{X'}$ المخطط

الإثبات:

(1) وجدنا في المبرهنة السابقة أنه لأجل $X, X' \in ob(\mathcal{C})$

يوجد دوال مباشرة. $h_X, h_{X'}: \mathcal{C} \to Set's$

لنعرف $f: h_{X'} \to h_X$ بالشكل:

$\forall A \in ob(\mathcal{C}): f(A): h_{X'}(A) \to h_X(A)$

$: \mathcal{C}(X', A) \to \mathcal{C}(X, A)$ ← مورفيزم في الفئة Set's

$\mathcal{C}(X', A), \mathcal{C}(X, A) \in ob(Set's)$

ليكن $v: A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} h_{X'}(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "h_{X'}(v)"'] & h_X(A) \arrow[d, "h_X(v)"] \\ h_{X'}(B) \arrow[r] & h_X(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}(X', A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "h_X(v)"'] & \mathcal{C}(X, A) \arrow[d, "h_{X'}(v)"] \\ \mathcal{C}(X', B) \arrow[r] & \mathcal{C}(X, B) \end{tikzcd}$$

ولنبرهن على أن هذا المخطط تبديلي: أي:

$$I_1 = h_X(v) \cdot f(A) = f(B) \cdot h_{X'}(B) = I_2$$

ليكن $w: X' \xrightarrow{w} A \in \mathcal{C}(X', A)$

SARRAGH STATIONERY

$$I_1 = (h_x(v)\cdot f(A))(w) = h_x(v)(f(A)(w)) = v\cdot(f(A)(w))$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f(A)(w)"] \arrow[dr, "v\cdot f(A)(w)"'] & A \arrow[d, "v"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$$I_2 = (f(B)\cdot h_{x'}(v))(w) = f(B)(h_{x'}(v)(w)) = f(B)(v\cdot w)$$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "v\cdot w"'] & A \arrow[d, "v"] \\ & B \end{tikzcd}$$

الصورة المباشرة لـ $(v\cdot w)$ حسب $f(B)$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\lambda"] & A \\ X \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "\lambda\cdot u"'] & \end{tikzcd}$$

سنعرف التطبيق f : $\lambda : X' \longrightarrow A$

$f(A)(\lambda) = \lambda\cdot u$

$$I_1 = (h_x(v)\cdot f(A))(w) = v\cdot(f(A)(w)) = v\cdot(w\cdot u)$$
$$I_2 = (f(B)\cdot h_{x'}(v))(w) = f(B)(v\cdot w) = (v\cdot w)\cdot u = v\cdot(w\cdot u)$$

تساوي الطرفين ومنه لأن كان $\forall\, w \in f(X',A)$

ومنه: $h_x(v)\cdot f(A) = f(B)\, h_{x'}(v)$ وهو المطلوب

$\boxed{2}$ نوجد مورفيزم دالي $g : \hat{h}_x \longrightarrow \hat{h}_{x'}$

أياً كان $A \in ob(f)$ ، نعرف g بالشكل:

$$g(A) : \hat{h}_x(A) \longrightarrow \hat{h}_{x'}(A)$$
$$: f(A,X) \longrightarrow f(A,X')$$
$$\forall\, \lambda \in f(A,X) : g(A)(\lambda) = u\cdot\lambda$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "u\cdot\lambda"'] & X \arrow[d, "u"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

لدينا $v : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة f

ولنبرهن على أن المخطط التالي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} \hat{h}_x(A) \arrow[r, "g(A)"] & \hat{h}_{x'}(A) \\ \hat{h}_x(B) \arrow[u, "h_x(v)"] \arrow[r, "g(B)"] & \hat{h}_{x'}(B) \arrow[u, "\hat{h}_{x'}(v)"'] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} f(A,X) \arrow[r, "g(A)"] & f(A,X') \\ f(B,X) \arrow[u, "\hat{h}_x(v)"] \arrow[r, "g(B)"] & f(B,X') \arrow[u, "\hat{h}_{x'}"'] \end{tikzcd}$$

SABBAGH STATIONERY

أي لنبرهن أن: $\hat{h}_{X'}(Bv) . g(B) = g(A) . \hat{h}_X(v)$

ليكن $w \in \mathcal{L}(B, X)$ عندئذ:

$$I_1 = (\hat{h}_{X'}(v) . g(B))(w) = \hat{h}_{X'}(v)(g(B)(w))$$

$$= \hat{h}_{X'}(v)(u.w)$$

$$= (u.w).v$$

$$I_2 = (g(A) . \hat{h}_X(v))(w) = g(A)(\hat{h}(v)(w))$$

$$= g(A)(w.v)$$

$$= u.(w.v) = (u.w).v = I_1$$

والمساواة صحيحة وذلك: $\forall w \in \mathcal{L}(B, X)$

أي: $\hat{h}_X(v) . g(B) = g(A) \hat{h}_X(v)$

ومنه: $\hat{h}_{X'} \longrightarrow \hat{h}_X$ مورفيزم طبيعي.

وهو المطلوب

انتهت المحاضرة