المحاضرة الأخيرة مندمجة

مسألة التسليح والتشويش

لنفرض أن A لديه ثلاثة أنواع من الأسلحة هي A_1, A_2, A_3 وأن B يقوم بـ ٣ أنواع من التشويش B_1, B_2, B_3 وأن احتمالات حسم المعركة لصالح الطرف A ومختلف الأسلحة والتشويش معطاة في الجدول التالي (مصفوفة المدفوعات التالية):

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	0.8	0.2	0.4
A_2	0.4	0.5	0.6
A_3	0.1	0.7	0.3

بما أن كل من A و B يرغب بحسم المعركة بأكبر احتمال ممكن إذاً على كل منهما أن يبحث عن استراتيجية مثالية تحقق له ذلك ولإيجاد تلك الاستراتيجية لكل منهما نشكل النموذج الرياضي وهو نموذج من القياس ~~2~~ 3x3
حل هذا النموذج يدل على المطلوب

يجب ذكرها هنا في الامتحان

ولكن قبل البدء نتخلص من الفواصل في المصفوفة حيث نضرب عناصرها بـ 10

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

الجدول كله موجب إذاً لا نضيف M ويكون $V = \frac{V'}{10}$

ويكون النموذج الرياضي على الشكل التالي

$$l = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط

عناصر العمود الأول لأن الجدول مكتوب من وجهة نظر A

$$8x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1$$
$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 1$$
$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 1$$

حيث $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\left(x_i = \frac{p_i}{V'} = \frac{p_i}{V} \right)$

نقوم بحل هذا النموذج الخطي بأي طريقة ممكنة (مثلاً السمبلكس المعدلة) فنحصل على

$$x_1 = \frac{1}{32}, \quad x_2 = \frac{3}{16}, \quad x_3 = 0$$

ويكون $Z = \frac{-7}{32}$ وبالتالي $l = -Z = \frac{7}{32}$

إذاً

$$V' = \frac{1}{l} = \frac{32}{7}$$

المفروض في V (حيث $V = \frac{V'}{10}$ لأننا ضربنا الجدول الأول بـ 10)

$$V = \frac{V'}{10} = \frac{32}{70}$$

وهو ثمن اللعبة

ويمثل احتمال ربح المعركة لصالح A إذا تبنى الاستراتيجية ذات الاحتمال:

$$p_1^* = x_1^* \cdot V' = \frac{1}{32} \cdot \frac{32}{7} = \frac{1}{7}$$

$$p_2^* = x_2^* \cdot V' = \frac{3}{16} \cdot \frac{32}{7} = \frac{6}{7}$$

$$p_3^* = x_3^* \cdot V' = 0 \cdot \frac{32}{7} = 0$$

إن التوزيع الاحتمالي لاستراتيجية A المرجحة هو:

$$p_A^* = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 0 \right)$$

تفسير النتائج:

إذا تبنى A الاستراتيجية المنفردة A_1 باحتمال قدره $\frac{1}{7}$ وتبنى الاستراتيجية المنفردة A_2 باحتمال قدره $\frac{6}{7}$

دون أن يطبق A_3 تماماً فإنه سيخسر المباراة لصالحه بنسبة

$$V = \frac{32}{70} = 0.457$$

أما الاستراتيجية المثالية لـ B فنرمز لها Q^*_B وهي عبارة عن

$$Q^*_B = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right)$$

ونترك أمر الحصول عليها كتمرين

حيث نقوم أولاً ببناء النموذج المرافق ثم نحله ونحصل على q^*_1, q^*_2, q^*_3

حيث $q^*_i = u^*_i \cdot V$

الحل البياني:

لنفرض أنه لدينا اللعبة غير المستقرة التالية:

B / A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	5	4
A_2	2	1	4	3
A_3	4	2	1	5

نلاحظ قبل كل شيء أن الاستراتيجية A_2 هي استراتيجية غير مربحة بالنسبة لـ A لأن عناصرها أصغر أو تساوي العناصر المقابلة لها في الاستراتيجية A_1 لذلك نقوم بحذفها نهائياً

كما نلاحظ بعد حذف A_2 أن الاستراتيجية B_4 هي استراتيجية غير مربحة بالنسبة لـ B لأن عناصرها أكبر من العناصر المقابلة لها من الاستراتيجية B_1 لذلك نقوم بحذفها نهائياً

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	5
A_3	4	2	1

النموذج الرياضي لهذه المسألة هو

$$l = x_1 + x_2 \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط

$$2x_1 + 4x_2 \geq 1$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 1$$
$$5x_1 + x_2 \geq 1$$

حيث $x_1, x_2 \geq 0$

نلاحظ أننا حصلنا على نموذج رياضي خطي عدد المتحولات فيه 2 لذلك نستطيع إيجاد الحل بيانياً

الحل البياني يتطلب رسم المستقيمات التي تمثل القيود وبذلك تحدد لنا منطقة الحلول المقبولة

(بما أن $l \longrightarrow Min$ فيهمنا أن تكون منطقة الحلول محدودة من الأسفل باتجاه تناقص التابع l)

نرسم المستقيمات التالية

1) $2x_1 + 4x_2 = 1$

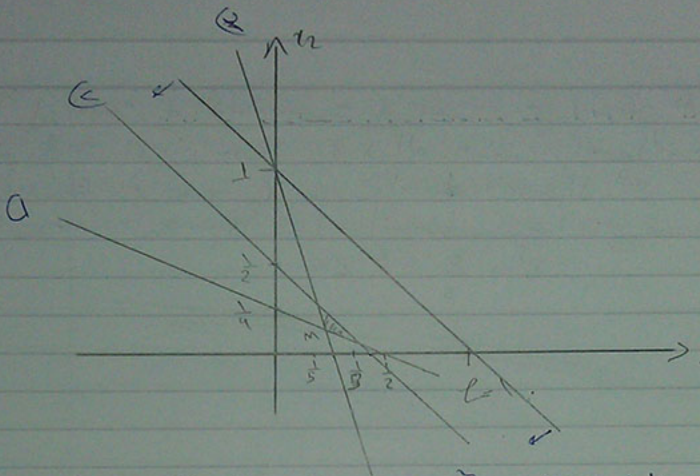
2) $3x_1 + 2x_2 = 1$

3) $5x_1 + x_2 = 1$

نرسم l بإعطائه قيمة مثل 1

$$l = x_1 + x_2 = 1$$

ثم نحركه باتجاه تناقصه مقتربين من المبدأ $(0,0)$



نجد أن نقطة الحل المثالي (أي نقطة تماس المستقيم $l = 1$ مع منطقة الحلول)

هي النقطة M نقطة تقاطع المستقيمين ١ و ٢ لذلك نحلهما حلاً مشتركاً ونوجد احداثياتها فنحصل على $M = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$

(نتحقق من ايجاد نقطة المتراجحة)

إذاً نقطة الحل الأمثل هي التي احداثياتها $x_1 = \frac{1}{4}$ ، $x_2 = \frac{1}{8}$ وتحقق

$$l = x_1 + x_2 = \frac{3}{8}$$ وبالتالي $$V' = \frac{1}{l} = \frac{8}{3}$$

الثمن الوسطي للعبة وهي $V = V'$

(لأننا لم نعدل قيمة الجدول الأول لا بإضافة M ولا بطرحها لعدد)

إذاً $V = \frac{8}{3}$

بالحساب نجد $p_1^* = x_1^* \cdot V' = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

$$p_2^* = x_2^* \cdot V' = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

إذاً $p_A^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

إذاً إن اطبق A الاستراتيجية A_1 باحتمال $\frac{2}{3}$ (مرتين كل ثلاث مرات)
ولم يطبق الاستراتيجية A_2 (التي حذفناها من الجدول)
وطبق الاستراتيجية A_3 باحتمال $\frac{1}{3}$ (مرة كل ثلاث مرات)
فإنه سيضمن حصة اللعبة لصالحه بنسبة (الربح قدره)

$$V = \frac{8}{3} = 2.66$$

انتهت المحاضرة

ملاحظات:

- تعاريف عامة ومفهوم عام للنمذجة (غير امتحانيات)
- نماذج خطية (مسألة ونموذج دون طريقة الحل)
- " لا خطية تحول إلى خطية (ماكسيمين والقيمة المطلقة)
  حلها بمضاريب لاغرانج)
- النماذج المتوافقة (مسألة، نموذجها الرياضي، حله، النموذج المرافق، حله أو نقطة الحل، نستنتج الحل الأمثل والمضمون الاقتصادي) مع الترجمة أو المعنى الاقتصادي
- نظرية الألعاب (مسألة، نموذج، حلها بيانياً أو سيمبلكس)
- إدارة المخزون (نموذج صف سكوني مع عجز، سكوني بدون عجز)
  اكتب الفرضيات الأساسية ثم أوجد الحل المثالي مع رسم شكل التابع، معنيه $(V < \infty)$
- مضاريب لاغرانج

G^* / N^* تحديد العلاقة التي من خلالها نحصل على الحجم ~~وأمثل طلبية~~

- الحل البياني للنمذجة (-1) المرتبة $2 \times m$ مطلوب حلها
  نبني نموذج رياضي ثم نحلها بيانياً
- النموذج السكوني (بدون أرقام)
  كتابة الفرضيات، إيجاد الحجم المثالي للطلبية
  المخزون يتحرك على خط مستقيم ونوجد تابع المستقيم
  ونرسمه، نوجد التكاليف

نظرية الألعاب. إيجاد الحل عن طريق أكبر الصغار أو ...
بناء نموذج $m \times n$
مسألة تشكيل وتشويش نموذج - وحله الحل من المرتبة $m \times 2$