تمرين: تتحرك نقطة مادية بحركة مستقيمة متغيرة بانتظام وفق الشروط التالية:
في لحظة البدء $t=0$ كانت النقطة $x=x_0=4$ وسرعتها $v=v_0=3$
وتسارعها $\gamma=\gamma_0=-2$ أوجد المعادلة الزمنية للحركة ثم ادرس الحركة.

الحل:
معادلة الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام $x=\alpha t^2+\beta t+\gamma$
عندما $t=0$ كانت $x=x_0=4$
$\Rightarrow 4=0+0+\gamma \Rightarrow \gamma=4$
عندما $t=0$ كانت $v=v_0=3$
$v=2\alpha t+\beta$
$3=0+\beta \Rightarrow \beta=3$
عندما $t=0$ كانت $\gamma=2\alpha \Rightarrow \gamma=-2$
$-2=2\alpha \Rightarrow \alpha=-1$
$\boxed{x=-t^2+3t+4}$

$x'=v=-2t+3$
$v=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$
$x_{t=\frac{3}{2}}=\frac{25}{4}$

t	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x	$-\infty$		$25/4$		$+\infty$
$x'=v$		$+$	0	$-$	
$x''=v'=\gamma$		$-$		$-$	
$x'\cdot x''=v\cdot\gamma$		$-$	0	$+$	
الحركة	تقدمية متباطئة		رجعية متسارعة		

تمرين: تتحرك نقطة على مستقيم وفق المعادلة
$x=\frac{b}{k^2}(kt+e^{-kt})$ k,b ثابتان
عين سرعة النقطة في لحظة البدء ثم أوجد تسارعها بدلالة k سرعتها

الحل:
$x'=v=\frac{b}{k^2}(k-ke^{-kt})=\frac{b}{k}(1-e^{-kt})$
$v_0=\frac{b}{k}(1-1)=0 \Leftarrow t=0$ لحظة البدء

$x'' = v' = \Gamma = \frac{b}{k}(k e^{-kt}) \Rightarrow \Gamma = b \cdot e^{-kt} \Rightarrow e^{-kt} = \frac{\Gamma}{b}$

نعوض في معادلة السرعة

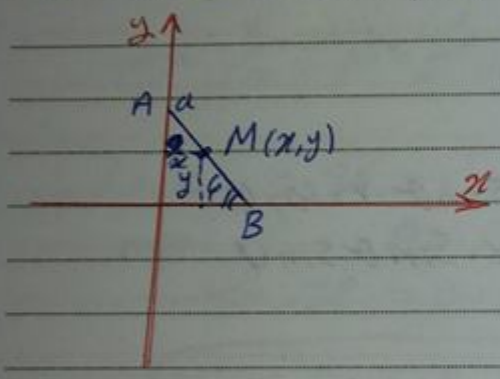
$v = \frac{b}{k}(1 - \frac{\Gamma}{b})$.

$v - \frac{b}{k} = -\frac{\Gamma}{k} \Rightarrow \boxed{\Gamma = b - kv}$

تمرين ٢:

AB قضيب يستند طرفه A على جدار والطرف الآخر B على الأرض بحيث أن الزاوية بين AB والأرض تزداد متناسبة مع الزمن $\varphi = \omega t$

~~معادلة~~ شكل معادلة الحركة للنقطة M من القضيب التي تبعد عن A بمقدار a وعن B بمقدار b ثم حدد مسارها.



الحل:

$y = b \sin\varphi$

$x = a \sin\varphi$

$\varphi = \omega t$ نعوض

معادلات الحركة $\begin{cases} y = b \sin\omega t \\ x = a \cos\omega t \end{cases}$

$\frac{y}{b} = \sin\omega t$

$\frac{x}{a} = \cos\omega t$

تربيع وجمع

$\boxed{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1}$ معادلة قطع ناقص

تمرين:

قطار سرعته $\vec{V} = 72\ km/h$ تمثل لحجرها

كم ينبغي أن تكون قيمة عامل الاحتكاك f بين الطريق وعجلات السيارة من أجل أن تتوقف هذه السيارة بعد مرور 6 ثوان من لحظة لحجرها

الحل:

$\vec{P}$ وزن السيارة = الكتلة الجاذبية $= m \cdot \vec{g}$

$\vec{F} = f \cdot \vec{P}$ قانون الاحتكاك

Subject : .....

حسب قانون تغير كمية الحركة

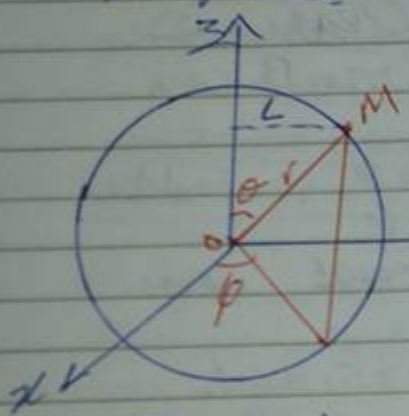
$$m\vec{V_2} - m\vec{V_1} = \int_0^6 -f\,dt = -[ft]_0^6$$

$$m\vec{V_2} - m\vec{V_1} = -6\vec{F}$$

$V_2 = 0$ ، $V_1 = \frac{72 \times 1000}{3600}$ m/s $\quad |g = 9.8|$

$$0 = -20m = -6f \cdot m \cdot g \Rightarrow f = 0,34$$

تمرين: أوجد معادلة الطاقة لنقطة مادية ثقيلة كتلتها m تتحرك على محيط كرة نصف قطرها r الحركة تحدث في مستوى شاقولي



$$\begin{cases} L = \sin\theta \cdot r \\ z = r\cos\theta \\ x = L\cos\varphi = \sin\theta \cdot r \cdot \cos\varphi \\ y = L\sin\varphi = r \cdot \sin\theta \sin\varphi \end{cases}$$

$$T + V = h$$

$$T = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2[(\theta')^2 + (\varphi')^2 \sin^2\theta]$$

لأنها بمحى اتجاه الحركة

$$\frac{1}{2} mr^2[(\theta')^2 + (\varphi')^2 \sin^2\theta] + mgz = h$$

$$r^2[(\theta')^2 + (\varphi')^2 \sin^2\theta] - 2gz = h_1 \quad ; \quad h_1 = \frac{h}{m}$$

تمرين: M نقطة مادية كتلتها m وتتأثر بقوة فاصلة (دفع) مركزية F جاذبة متناسبة مع بعد النقطة عن مركز الجذب O

$\vec{F} = -m\omega^2 \overrightarrow{OM}$ ؛ ω ثابت

في لحظة البدء قذفت النقطة من الموضع M_0 بسرعة v_0

① عين معادلات الحركة

② عين المسار

الحل: نرمز لمكان الجسم بالرمز $\vec{r}$ أي $\vec{r}=\overrightarrow{GM}$ حيث G مركز الثقل

$$\Rightarrow m\vec{\Gamma} = \vec{f} - m\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{\Gamma} = -\omega^2\vec{r}$$

$$r'' + \omega^2 r = 0$$

بسبب ورود r:
لا نعلم اتجاه المسار
هل هو مستقيم
أم منحنى

معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية بأمثال ثابتة

يكون الحل العام من الشكل:

$$r = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$= A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad ; A = C_1 + C_2$$

$$B = i(C_1 - C_2)$$

من شروط البدء في اللحظة $t_0 = 0$ $r_0 = r_{t_0}$

$$\Rightarrow r_0 = A + 0 \Rightarrow A = r_0$$

$$t = 0 \ ; \ v = r' = v_0$$

$$\Rightarrow r' = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\Rightarrow v_0 = 0 + B\omega \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\boxed{r = r_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$

يبدو من شكل المعادلة أن المسار مستوي

تدرج تابع:

نعرف تدرج تابع $f(x,y,z)$ كما يلي:

$$\vec{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

مثال: $f(x,y,z) = 2xz - 5y$

تدرج f هو:

$$\vec{\nabla f} = 2z\vec{i} - 5\vec{j} + 2x\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2z \Rightarrow f_x = 2zx + C_1$$

لكن التدرج الواحد أو التابع المؤلف

$$\frac{\partial}{\partial y} = -5 \Rightarrow F_y = -5 + C_2 \quad / \quad \frac{\partial}{\partial z} = 2x \Rightarrow F_z = 2xz + C_3$$

ملاحظة: ليس بالضرورة كل تدرج يقابل تابع.
(مثال)

Subject : .....

عين بين صفا إذا كان الحقل $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ هو تدرج لتابع

الحل

$\frac{\partial f}{\partial x} = yz \Rightarrow f_x = yzx + C_1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = zx \Rightarrow f_y = zxy + C_2$

$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \Rightarrow f_z = xyz + C_3$

إذاً $\vec{F}$ هو تدرج للتابع $f = xyz + C$; $C = C_1 + C_2 + C_3$

مسألة : M نقطة مادية تتحرك في المستوي xy وفق المعادلتين

$x = 2t$ ، $y = 4t^2$

من ① نجد $t = \frac{x}{2}$ نعوض في ② $\Leftarrow y = 4\frac{x^2}{4} - 1$ $\Rightarrow y = x^2 - 1$

معادلة المسار هي قطع مكافئ

لإيجاد السرعة $x' = 2$ ، $y' = 8t$

$\Rightarrow v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{4 + 64t^2}$

لإيجاد التسارع $x'' = 0$

$y'' = 8$

$\Rightarrow \Gamma = \sqrt{x''^2 + y''^2} = \sqrt{0 + 8} \Rightarrow \Gamma = 2\sqrt{2}$

عين معادلة مسار ونسارع متحرك في مستوي وفق المعادلتين

$x = at$ ① ؛ $y = bt$ ② حيث a, b ثابتة

من ① نجد $t = \frac{x}{a}$ $\Leftarrow$ معادلة المسار هي $y = \frac{b}{a}x$ مستقيم

لإيجاد السرعة $\left\{ \begin{matrix} x' = a \\ y' = b \end{matrix} \right. \Leftarrow v = \sqrt{a^2 + b^2}$

لإيجاد التسارع $\left\{ \begin{matrix} x'' = 0 \\ y'' = 0 \end{matrix} \right. \Leftarrow \Gamma = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ التسارع معدوم

Subject : .....

/ /

عين سرعة و سرعة نقطة مادية تتحرك في مستوى وفق الاحداثيات القطبية.

$r = \alpha t$ ①

$\theta = \beta t$

من ① نستخرج $t = \frac{r}{\alpha}$ نعوضها في ② $\theta = \frac{\beta}{\alpha} r$

وهي تمثل معادلة خطوط.

السرعة بدلالة الاحداثيات القطبية

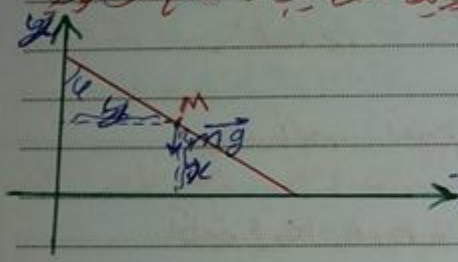
$$v^2 = \sqrt{r'^2 + r^2 \theta'^2}$$

$r' = \alpha$ ، $\theta' = \beta$ $\Rightarrow$ $v = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \beta^2} = \alpha \sqrt{1 + \beta^2}$

يتركب قضيب BD طوله l بحيث يشكل طرفاه مع خطين مستقيمين متعامدين زاوية قائمة بحيث أن الزاوية θ بين القضيب والمحور الأفقي تتناسب مع الزمن حيث $\theta = \omega t$.

M نقطة مادية تتحرك على منتصف القضيب.

أوجد معادلات حركة M ثم أوجد مسارها.



الحل من العلاقة الأساسية في التحريك

$m \cdot \vec{\Gamma} = \vec{F}$

$m \cdot \vec{\Gamma} = -m\vec{g}$

$\vec{\Gamma} = -\vec{g}$

بالاسقاط

$x'' = 0$ ، $y'' = -g$

$x' = c_1$ ، $y' = -gt + c_3$

معادلات الحركة $x = c_1 t + c_2$ ، $y = -\frac{1}{2} g t^2 + c_3 t + c_4$

$\sin\theta = \frac{x}{l} \Rightarrow x = l \sin\theta = l \sin \omega t$

من شرط البدء $t = 0 \Rightarrow x = 0$

$\cos\theta = \frac{y}{l} \Rightarrow y = l\cos\theta \Rightarrow y = l \cos \omega t$

من شرط البدء $t = 0 \Rightarrow y_0 = l$

معادلات المسار هي $\begin{cases} x = l \sin \omega t \\ y = l \cos \omega t \end{cases}$

$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = l^2$

المسار دائرة

معادلات الطاقة

$T + U = h$

$T = \frac{1}{2} m v^2$

Subject : .....

$x' = -\omega l \cos\omega t$
$y' = -\omega l \sin\omega t$ $\Rightarrow v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\omega^2 l^2 \cos^2\omega t + \omega^2 l^2 \sin^2\omega t}$

$\Rightarrow v = \sqrt{\omega^2 l^2 (1)} = \omega l$

$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \omega^2 l^2$

$U = -mgy$.

$\Rightarrow h = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 - mgl \cos\omega t$

$l\omega^2 - 2g \cos\omega t = h_1$ $\Leftarrow \frac{h}{m} = h_1$

الحاضرة الأخيرة 2014/5/11

مسألة تقوم نقطة بحركة اهتزازية توفق المعادلتين

$x = a\cos(2kt - \varepsilon)$ ①

$y = b\cos(kt)$ ② و b, a, k, ε ثوابت

أوجد مسار النقطة M وبين أنه عبارة عن قطع ناقص مركزه مبدأ المعلم ثم أوجد مساحته علماً أن $a = 2b$، وعين سرعة النقطة M في لحظة البدء.

الحل من ① $\Leftarrow$

$\frac{x}{a} = \cos 2kt \cos\varepsilon + \sin 2kt \sin\varepsilon$

$= \cos^2 kt \cos\varepsilon - \sin^2 kt \cos\varepsilon + 2\sin kt \cos kt \sin\varepsilon$

$\sin^2 kt = 1 - \frac{y^2}{b^2}$ $\Leftarrow \frac{y}{b} = \cos kt$ من ②.

$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2}\cos\varepsilon - (1 - \frac{y^2}{b^2})\cos\varepsilon + 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\,\frac{y}{b}\sin\varepsilon$

$\frac{x}{a} = \cos\varepsilon(-1 + 2\frac{y^2}{b^2}) + \frac{2y}{b}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\sin\varepsilon$

لإيجاد السرعة في لحظة البدء $t = 0$

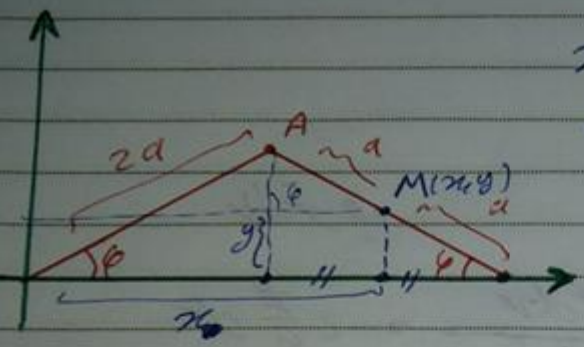
$x' = -a2k\sin(2kt - \varepsilon)$ $\Rightarrow x'_{t=0} = -a2k\sin(-\varepsilon) = 2ak\sin\varepsilon$

$y' = -kb\sin kt$ $\Rightarrow y'_{t=0} = 0$

$\Rightarrow v = |x'| = 2ak\sin\varepsilon$

مسألة: حدد معادلة حركة النقطة M المنتمي لذراع جهاز آلي إذا علمت أن $OA=AB=2a$ وأن الزاوية θ تتغير مع الزمن حسب المعادلة $\theta=\omega t$

الحل:



$$x = 2a\cos\theta + a\cos\theta$$
$$y = a\sin\theta$$
$$\Rightarrow x = 3a\cos\omega t$$
$$y = a\sin\omega t$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

المسار هو قطع ناقص

$$\left.\begin{aligned} x' &= -3a\omega\sin\omega t \\ y' &= a\omega\sin\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{x'^2+y'^2} = a\omega\sqrt{9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}$$

توجد علبة صغيرة كتلتها m على سكة دائرية أفقية نصف قطرها a.
أعطيت هذه العلبة سرعة ابتدائية v_0 في اتجاه المماس.
فإذا علمت أن عامل الاحتكاك f
والمطلوب تعيين المسافة التي تقطعها العلبة حتى التوقف.

الحل:

القوى المؤثرة:
- $\vec{P} = m\vec{g}$ عامل الاحتكاك
- $\vec{F}$ رد الفعل الناظمي
- $\vec{R_N}$ المقاومة
- $\vec{R_\tau}$

من المعادلات الناتجة للحركة:

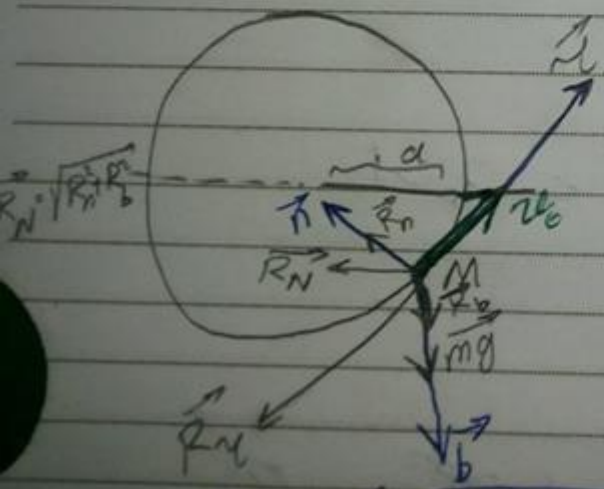
$$m\frac{dv}{dt} = -R_\tau$$

$d = \rho$ نصف قطر الكرة

$$\frac{mv^2}{\rho} = R_n$$

$$R_b - P = 0$$

$$R_\tau = f|R_N| = f\sqrt{R_n^2+R_b^2} = mf\sqrt{\frac{v^4}{a^2}+g^2}$$



$$R_\tau = f\sqrt{\left(\frac{mv^2}{a}\right)^2 + (mg)^2}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\vec{R}_t$$

لدينا

$$m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = -\vec{R}_t$$

$$mv\frac{dv}{ds} = -\vec{R}_t$$

$$mv\frac{dv}{ds} = -\frac{m}{a}f\sqrt{v^4+a^2g^2}$$

بالتعويض

$$\Rightarrow \frac{v\,dv}{\sqrt{v^4+a^2g^2}} = -\frac{f}{a}ds \rightarrow \frac{2v\,dv}{\sqrt{v^4+a^2g^2}} = -2\frac{f}{a}ds.$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{d(v^2)}{\sqrt{(v^2)^2+a^2g^2}} = -\frac{2f}{a}\int_0^5 ds$$

$$\left[\ln\left|v^2+\sqrt{a^2g^2+v^4}\right|\right]_{v_0}^{v} = -2\frac{f}{a}[5]_0^5$$

$$\ln\frac{v_0^2+\sqrt{a^2g^2+v_0^4}}{v^2+\sqrt{a^2g^2+v^4}} = 2\frac{f}{a}5$$

عندما تتوقف الحافلة $v=0$

$$\ln\frac{v_0^2+\sqrt{a^2g^2+v^4}}{ag} = 2\frac{f}{a}5$$

$$\Rightarrow S = \frac{a\ln\left(\frac{v_0^2+\sqrt{a^2g^2+v^4}}{ag}\right)}{2f}$$

انتهت المسألة

انتهت الحل عنده

انتهى العمل