"المحاضرة" 11

ادرس الاستمرار على $\mathbb{R}^2$.

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & : x \neq 0 \\ y & : x = 0 \end{cases}$$

① $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin xy}{x} = \frac{\sin ab}{a} = h(a,b) \Rightarrow h(x,y) \text{ مستمرة}$$

② $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a = 0$

على كامل $\mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,b)} y\frac{\sin xy}{xy} = b = h(0,b)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} y = b = h(0,b)$$

على المحور oy $\boxed{a=0}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,b)} y = b = h(0,b). \Rightarrow \text{الدالة مستمرة على } R^2$$

$f(x,y) = x^2 y^5$

مشتق جزئي بالنسبة للمتغير الأول $= f_x(x,y) = 2xy^5$

مشتق جزئي بالنسبة للمتغير الثاني $f_y(x,y) = 10x^2y^4$

البحث الثاني: مشتقات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

تذكر؟

$c \in D^\circ$ $\qquad f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c_1+h, c_2, \ldots, c_n) - f(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{h}$$

ولنأخذ النهاية التالية، إذا كانت هذه النهاية موجودة فإننا نسميها للدالة f مشتق جزئي بالنسبة للمتغير الأول في النقطة c، نرمز له بـ

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(c) \text{ أو } \frac{dF}{dx_1}(c) \text{ أو } D_1F(c) \text{ أو } F_{x_1}(c)$$

وبنفس الطريقة نوجد المشتق الجزئي بالنسبة لـ x_2

LAVIB.net
صنع الحضارة

$\frac{\partial F(c)}{\partial x_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1, c_2+h, c_3, \dots c_n) - f(c_1, \dots c_n)}{h} = \frac{\partial F}{\partial x_2}(c)$

وهكذا نحصل على n مشتق جزئي ندعوها بالمشتقات الجزئية

المشتقات الجزئية الأولى للدالة f ونرمز لها ب:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(c) \; : \; i = 1, 2, \dots n$$

★ أما لو نظرنا إلى الدالة التالية

دالة المشتق الجزئي الأول

$$f_{x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} : D^\circ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$c \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_1}(c)$$

حيث

ووجدنا أن لها مشتق جزئي بالنسبة لـ x_1 نكتب

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} \; , \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \; , \; f_{x_1 x_1}$$

أي يحصل على مشتق جزئي ثاني لـ x_1 $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$

مشتق جزئي ثاني للمتغير الأول

$$\frac{\partial}{\partial x_2} F x_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial x_1} = F_{x_1 x_2} \text{ أو } D_2 D_1 f$$

✦ وبنفس الطريقة نعرف المشتقات الجزئية لمراتب أعلى وهكذا في حالة الدالة $f(x, y)$ لمتغيرين، فإننا نرمز لمشتقاتها الجزئية من المرتبة M على النحو التالي:

مشتق مختلف

$$\frac{\partial^M F}{\partial x^M} \; , \; \frac{\partial^M F}{\partial x^{M-1} \partial y} \; , \; \frac{\partial^M F}{\partial x^{m-2} \partial y^2} \; , \dots \; \frac{\partial^M F}{\partial y^M}$$

عددها $m+1$ مشتق جزئي، ويطلق عادة على المشتقات الجزئية من الشكل

$$\frac{\partial^m F}{\partial x_1^m} \; , \; \frac{\partial^m F}{\partial x_2^m} \; , \dots$$

$(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

إذا أخذت الدالة المشتقة ولمرة بالنسبة لـ x ومرة ثانية بالنسبة

موجودة ومستمرة

يطلق عليها المشتقات الجزئية الصرفة. 30:35

أما المشتقات الجزئية التي يتم فيها الاشتقاق بالنسبة لأكثر من متغير فإنها تسمى بالمشتقات الجزئية المختلطة.

مرة للمتغير x_1 ومرة x_2 ...

مثال:

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto x^3 y^5$

أوجد المشتقات الجزئية عليا:

$f_x(x, y) = 3x^2y^5, \quad f_{xx}(x, y) = 6xy^5$

$f_y(x, y) = 5x^3y^4, \quad f_{yy}(x, y) = 20x^3y^3.$

$f_{xy}(x, y) = 15x^2y^4, \quad f_{yx}(x, y) = 15x^2y^4.$

$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x.$

$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} f_y$

في هذه الحالة المشتقات الجزئية المختلطة متساوية، موجودة و [illegible]

مثال:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

أثبت أن: $f_{xy} \neq f_{yx}$ المشتقات الجزئية المختلطة [illegible] مشتقة

الحل:

$(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow f_x(x, y) = \dfrac{y^2x^2 + y^6 - 2x^2y^2}{(x^2 + y^4)^2} = \dfrac{-2x^2y^2 + y^6}{(x^2+y^4)^2}.$

$f_y(x, y) = \dfrac{2xy(x^2 + y^4) - 4xy^5}{(x^2 + y^4)^2} = \dfrac{2x^3y + 2xy^5 - 4xy^5}{(x^2 + y^4)^2}$

$= \dfrac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2 + y^4)^2}$

نوجد f_{xy} و f_{yx}

f_{xy}

$\dfrac{dF_x}{dy} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f_x(0, 0+h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{h^6}{h^8}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h^3} = \infty$

$\lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{0}{h^4}}{h} = 0$

$\dfrac{dF_y(x,y)}{dx} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f_y(0+h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{0}{h^5} = 0$

$\Longrightarrow F_{xy} \neq F_{yx}.$

ALMDIB.net

ابن الحضارة

* المجموعة المفتوحة: أي نقطة منها يوجد لها كرة مفتوحة محتواة فيها *

/ /

مبرهنة: (بدون برهان): يعتبر مهم

لتكن $f: D\subseteq R^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

ولتكن D مجموعة مفتوحة، ولنفرض تحقق الشرطين التاليين

1) المشتقات الجزئية: f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}

موجودة في كل نقطة من D.

2) المشتقات المختلطة f_{xy}, f_{yx} مستمرات في نقطة، ولتكن $(a,b)\in D$ عندئذٍ،

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

- تعميم المبرهنة على الفضاء R^n: (بدون برهان)

لتكن $f: D\subseteq R^n \longrightarrow \mathbb{R}$

ولتكن D مجموعة مفتوحة و c ينتمي إلى D° (داخل D)

ولنفرض أولاً: أن كل المشتقات الجزئية المختلطة حتى $(n-1)$ موجودة ومستمرة في الساحة D.

والمشتقات المختلطة من الرتبة (n) موجودة في D

ثانياً: المشتقات الجزئية المختلطة من الرتبة n مستمرة في نقطة $c\in D$.

عندئذٍ: تكون

قيمة أي مشتق جزئي في النقطة c مستقلة تماماً عن الترتيب الذي يجري فيه المشتقات.

تعريف المشتق الاتجاهي:

لتكن f دالة معرّفة على $D\subset R^n$ مستقرها R

$f: D\subseteq R^n \longrightarrow R$

ولتكن c نقطة داخلية في D $(c\in D^\circ)$

و $u\in R^n$ بحيث $\|u\|=1$

مهم

فإذا وجدت النهاية التالية: $$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h} = \frac{df}{du}(c)$$

فإننا نسميها مشتقة الدالة F في النقطة c باتجاه u ونرمز لها بالرمز $\frac{dF}{du}(c)$

(111) **ملاحظة**: إن هذا التعريف ليس إلا تعميماً لمفهوم المشتق الجزئي الذي تعرفنا عليه سابقاً، وذلك عندما نعتبر الشعاع u هو أحد أشعة القاعدة النظامية في R^n وهي:

$$\{ e_1(1,0,0,\dots,0),\ e_2(0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ e_n(0,0,\dots,1) \}$$

وعندما نشتق f للدالة ومشتقة الاتجاه في نقطة $u=e_1$ في نقطة داخلية معينة.

نحصل على المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير الأول x_1 في النقطة

برهان

$$(c+uh) = (c_1, c_2, \dots, c_n) + h(1,0,\dots,0)$$
$$= (c_1+h, c_2, \dots, c_n)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+uh)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c_1+h, c_2, \dots, c_n) - f(c_1 \dots c_n)}{h}$$
$$= \frac{dF}{dx_1}(c)$$

مثال:

$$f: R^2 \longrightarrow R$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

ولتكن $c(0,0)$

$u=(\alpha, B)$ بحيث أن $\boxed{\alpha^2+B^2=1}$

أوجد المشتق الاتجاهي للدالة f في النقطة $(0,0)$.

الحل:

$$\|u\| = \sqrt{\alpha^2+B^2} = 1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$

$$(c+hu) = (0,0) + h(\alpha, B)$$
$$= (h\alpha, hB)$$

$$\frac{f(c+hu)}{} = f(h\alpha, h\beta) = \frac{h^3\alpha\beta^2}{h^2(\alpha^2+\beta^2)} = \frac{h\alpha\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{h\alpha\beta^2 - 0}{h} = \alpha\beta^2$$

تمرين :

$$f : R^n \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto \|x\|^2 = f(x)$$

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$c = (c_1, \dots\dots c_n)$$

أوجد : $\frac{dF}{du}(c)$ (المشتقة الاتجاهية)

الحل :

$$\|u\| = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} = 1$$

$$(c+hu) = (c_1, c_2, \dots, c_n) + \left(\frac{h}{\sqrt{n}}, \frac{h}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{h}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(c_1 + \frac{h}{\sqrt{n}}, c_2 + \frac{h}{\sqrt{n}}, \dots, c_n + \frac{h}{\sqrt{n}}\right)$$

$$f(c+hu) = \left(c_1 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(c_2 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(c_n + \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$= (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) + h^2 + \frac{2h}{\sqrt{n}}(c_1 + \dots + c_n)$$

$$f(c) = (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2\frac{h}{\sqrt{n}}(c_1 + c_2, \dots + c_n)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(h + \frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} c_i\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} c_i$$

انتهت المحاضرة 11

ALADIB.net