الرياضيات

تمارين محلولة تحليل (٤)

السنة الثانية
«الفصل الثاني»

د. هدى الشماط

"تم حل بعض التمارين في المحاضرة الأخيرة"

تمارين محلولة تحليل (٤) للسنة الثانية رياضيات

١) لتكن $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة معرفة بالصيغة

$$f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

حدد من بين المشتقات $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial e}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial e}(0,1)$

حيث $e=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ما كان موجوداً، فسر، واحسب في حال وجود المشتق قيمته المدرجة

الحل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$ موجودة

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,1)-f(0,1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^{\frac{1}{3}}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}=\infty$$ غير موجودة

$$\frac{\partial f}{\partial e}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f((0,0)+he)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(h\frac{\sqrt{2}}{2},h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot h^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h\frac{\sqrt{2}}{2}}{h}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ موجودة

$$\frac{\partial f}{\partial e}(0,1)=\lim_{h\to0}\frac{f((0,1)+he)-f(0,1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(h\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}h+1\right)-f(0,1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\left(h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h+1\right)^{\frac{2}{3}}-0}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{h}+\frac{\sqrt{2}}{2h^2}\right)^{\frac{1}{3}}=$$ غير موجودة

---

٢) لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن أن f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ إلا أن مشتقيها $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ليسا محدودين (وبالتالي ليسا مستمرين) في جوار النقطة $(0,0)$

الحل: (أ) لنوجد f_x ، f_y من أجل $(x,y)\neq(0,0)$ وفي نقطة داخلية في

$$f_x(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{(x^2+y^2)(-2x)}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$f_y(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

نلاحظ أن f_x ، f_y موجودين في جوار $(0,0)$ ، $(x,y)\neq(0,0)$ ومستمرين فيه وكل من f_x ، f_y مجموع وجداء وتركيب دوال مستمرة في $((x,y)\neq(0,0))$ فالدالة f قابلة للاشتقاق فيها

(ب) أما إذا كانت $(x,y)=(0,0)$ فإن

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h^2}$$

$$= 0\cdot\sin(\infty) = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{k^2\sin\frac{1}{k^2}}{k} = 0$$

ومنه حتى تكون f قابلة للاشتقاق في $(0,0)$ يجب أن تتحقق المعادلة التالية

$$f(0+h,0+k) - f(0,0) = hf_x(0,0) + kf_y(0,0) + \eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

حيث $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\eta(h,k) = 0$

$$(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2} = \eta\sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow \eta = \sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\eta(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2} = 0 \,!$$

إذن f قابلة للاشتقاق عند النقطة $(0,0)$ ومن (أ) و (ب) نجد f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}^2$.

نتحول كي نتأكد إنه محدود إذا كانت نهايته موجودة ومحدودة .

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{إذا } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ولنحسب $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ على المستقيم $x=y$

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2} - \frac{2x}{2x^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 - \infty = -\infty$$

إذن f_x غير محدودة في جوار $(0,0)$

نفس العائلة يبرهن أن
طريق منحنى. f_y غير محدود بجوار $(0,0)$ وبالتالي لا يمكن أن يكون

(3) لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ب- هل أن مشتق f في النقطة $(0,0)$ باتجاه أي متجه $u(a,b)$ موجود ولماذا

إذا كان $a\neq0$ فإن $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\frac{b^2}{a}$

ثبت أن f ليست مستمرة، وبالتالي ليست قابلة للاشتقاق في $(0,0)$

ل:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+ha,0+hb)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3ab^2}{h^2a^2+h^4b^4}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3ab^2}{h^3a^2+h^5b^4}=\lim_{h\to0}\frac{ab^2}{a^2+h^2b^2}=\frac{b^2}{a}\ ،\ a\neq0\ \text{أما}$$

أما إذا $a=0$ فإن $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=0$

لبرهان أن f غير مستمرة في $(0,0)$.

طريقة (1): نأخذ متتالية $\{(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})\}\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$ أما

$$f(\tfrac{1}{n^2},\tfrac{1}{n})=\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}=\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

وبالتالي f غير مستمرة في $(0,0)$ وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق في $(0,0)$

طريقة (2) لنبرهن أن f غير مستمرة على الطريق $x=y^2$

$$\Rightarrow\lim_{(x,x^2)\to(0,0)}f(x,x)=\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

إذن f غير مستمرة في $(0,0)$ وبالتالي غير قابلة للاشتقاق في النقطة $(0,0)$.

(4) لتكن $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ ، $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ الدالتين $f(x,y)=x^2+y^2$ ، $g(t)=(3t+1,2t-3)$

فإذا افترضنا أن $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ هي الدالة $F(t)=(f\circ g)(t)$

احسب $F'(t)$ بطريقتين مختلفتين

$$= (3t+1)^2 + (2t-3)^2 = (9t^2+6t+1) + (4t^2-12t+9)$$

$$= 13t^2 - 6t + 10$$

$$\boxed{F'(t) = 26t - 6}$$

الطريقة الثانية: $F(t) = f(3t+1, 2t-3)$

$x(t) = 3t+1 \quad , \quad y(t) = 2t-3$

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= 2x(3) + 2y(2) = 6(3t+1) + 4(2t-3)$$

$$= 18t + 8t + 6 - 12 = 26t - 6$$

---

(5) إذا كانت $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}^n$:

وكان $f(x) \geq 0$ أيا كانت x في $\mathbb{R}^n$. فبين أن $\sqrt{f}$ مستمرة على $\mathbb{R}^n$.

الحل: فلنأخذ $a \in \mathbb{R}^n$ ونفرض أن $f(a) \neq 0$ فبما أن f مستمرة على $\mathbb{R}^n$ فلكل

$\varepsilon \sqrt{f(a)} = \varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\|x-a\| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}}\right| < \frac{|f(x)-f(a)|}{\sqrt{f(a)}} < \frac{\varepsilon \sqrt{f(a)}}{\sqrt{f(a)}}$$

$$< \varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\sqrt{f(x)}$ مستمرة من أجل $a \in \mathbb{R}^n$ ، $f(a) \neq 0$

أما إذا كانت $f(a) = 0$ فإنه من أجل $\varepsilon^2 > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\|x-0\| < \delta \Rightarrow 0 < f(x) < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{f(x)} < \varepsilon$$

فالدالة $\sqrt{f}$ مستمرة أيا كانت $a \in \mathbb{R}^n$

---

(6) لتكن $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالدستور

$f(x) = e^x \cdot \sin x$ أثبت أن متسلسلة تايلور

لهذه الدالة حول النقطة 0 هي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin(n\frac{\pi}{4})}{n!} x^n$ ؟

وأن هذه المتسلسلة متقاربة أيا كان x في $\mathbb{R}$،

الحل: نعلم أن منشور تايلور حول الصفر والمجموع المشتقات على جميع المراتب موجودة عند الصفر

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

(4)

ومنه

يكفي أن نبرهن أن $f(0)=0$

$f^{(n)}(0)=(\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

بتعديل عبارة

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\,e^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

بالاستقراء وبالاستعمال تعديل العبارة نجد

$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0)=(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}$

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$$

نبحث عن تقارب هذه السلسلة: نطبق دالامبير

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{2}\sin\frac{n+1}{4}\pi}{(n+1)\sin\frac{n}{4}\pi}x\right|=|x|\lim\left|\frac{\sqrt{2}\sin\frac{n+1}{4}\pi}{(n+1)\sin\frac{n+1}{4}\pi}\right|$$

$$\Rightarrow |x|<\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sin\frac{n\pi}{4}}{\sqrt{2}\sin\frac{n+1}{4}\pi}=\infty$$

وبالتالي منه متقاربة $\forall x\in\mathbb{R}$ وبالتالي مجال التقارب هو $]-\infty,+\infty[$

(1) انشر الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ $f(x,y)=e^{x+y}$ وفق قوى $x-2$ و $y+2$

الحل: بما أن المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة من جميع المراتب عند $R_{m+1}\xrightarrow[m\to\infty]{}$ في جوار $(2,-2)$.

يعطى منشور تايلور

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+R_{m+1}$$

$$f(h+2,k-2)=f(2,-2)+(hf_x+kf_y)(2,-2)+\frac{h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}}{2!}+\frac{h^3f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy}}{3!}(2,-2)----$$

إذن

$f(2,-2)=e^0=1$

$f_x(x,y)=e^{x+y}=f_y(x,y)=f_{xy}(x,y)=f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)=---$

$f_x(2,-2)=1=f_y(2,-2)=f_{xy}(2,-2)=f_{yy}(2,-2)=f_{xy}(2,-2)=1$

$$f(h+2,k-2)=1+(h+k)+\frac{(h+k)^2}{2!}+\frac{(h+k)^3}{3!}+---+\frac{(h+k)^n}{n!}+--$$

(6)

$$(h+2,\ k-2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h+k)^n}{n!}$$

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((x-2)+(y+2))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

(٨) انشر وفق قوى x, y الدالة $f(x,y)=\log(1-x-y+xy)$
وأوجد مجال تقاربه

الحل: المنشور من قوى x, y أي بجوار $(0,0)$

$$f(x,y) = \log(1-x-y+xy) = \log((1-x)(1-y))$$
$$= \log(1-x) + \log(1-y)$$

يجب أن تكون $x^2+y^2<1$ (مجال التقارب $(0,0)$)

$$f_x(x,y) = \frac{-1}{1-x}, \quad f_{xx}(x,y) = \frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{-1!}{(1-x)^2}$$

$$f_{xxx}(x,y) = \frac{-2}{(1-x)^3} = \frac{-2!}{(1-x)^3}$$

$$f^{(4)}_{x}(x,y) = \frac{-2\cdot 3}{(1-x)^4} = \frac{-3!}{(1-x)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}_{x}(x,y) = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} \Rightarrow f^{(n)}_{x}(0,0) = -(n-1)!$$

وبنفس الطريقة

$$f^{(n)}_{y}(x,y) = \frac{-(n-1)!}{(1-y)^n} \Rightarrow f^{(n)}_{y}(0,0) = -(n-1)!$$

$$f_{xy}(x,y) = 0 \qquad f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^n f}{\partial x^j \partial^{n-j} y}(x,y) = 0 \quad \forall n, j$$

$$f(h,k) = f(0,0) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0) + R_{m+1}$$

وبما أن المشتقات من جميع المراتب موجودة ومستمرة أي الجوار $x^2+y^2<1$

$$f(h,k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[h^n(-1)(n-1)! + k^n(-1)(n-1)!\right] \qquad \therefore R_{m+1} \to 0$$

$$f(h,k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n+k^n}{n} \Longrightarrow f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n-y^n}{n}$$

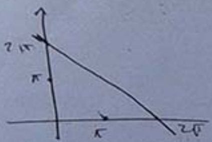
تمارين التفاضل نظري

9) لتكن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

حدد نقاط القيم القصوى النسبية داخل المثلث المحدد بالمحورين ox , oy والمستقيم الذي معادلته $x+y=2\pi$

الحل:



$$f_x(x,y) = \cos x - \cos(x+y)$$

$$f_y(x,y) = \cos y - \cos(x+y)$$

$$f_x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos(x+y) \Rightarrow \begin{cases} x+y = x + 2\pi k & (1) \\ \text{أو} \\ x+y = -x + 2\pi k & (2) \end{cases}$$

$$f_y = 0 \Rightarrow \cos y = \cos(x+y) \Rightarrow \begin{cases} x+y = y + 2\pi k & (3) \\ \text{أو} \\ x+y = -y + 2\pi k & (4) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow y = 2\pi k \quad , k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ (جميع المستقيمات // ox ولا يتقاطع مع داخل المثلث)

$(2) \Rightarrow 2x + y = 2\pi k \Rightarrow y = 2\pi k - 2x$

$k = 1 \Rightarrow y = 2\pi - 2x \quad (*)$ (جزء $0 < x < \pi$, تقع داخل المثلث)

$k \neq 1 \Rightarrow$ جميع النقاط خارج المثلث.

$(3) \Rightarrow x = 2\pi k \quad , k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ (جميع المستقيمات // oy ولا يتقاطع مع داخل المثلث)

$(4) \Rightarrow 2y + x = 2\pi k \Rightarrow x = 2\pi k - 2y$

$k = 1 \Rightarrow x = 2\pi - 2y$ (جزء $0 < y < \pi$ تقع داخل المثلث) $(**)$

$k \neq 1 \Rightarrow$ جميع النقاط خارج المثلث

أما الحل المشترك لـ $(*)$ و $(**)$ هو ما يلي

$$\begin{matrix} y = 2\pi - 2x \\ x = 2\pi - 2y \end{matrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y + 2x = 2\pi \\ 2y + x = 2\pi \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{بالطرح}} x = y \Rightarrow 3y = 2\pi \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3}$$

$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ إذاً النقطة المرشحة الوحيدة داخل المثلث

$$f_{xx}(x,y) = -\sin x + \sin(x+y) \Rightarrow f_{xx}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$f_{yy}(x,y) = -\sin y + \sin(x+y) \Rightarrow f_{yy}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

V

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \sin(x+y) \Longrightarrow f_{xy}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy} & f_{xx} \\ f_{yy} & f_{yx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{4}\right) - 3 = -\frac{9}{4} < 0$$

$$f_{xx}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0$$

إذن $\Delta < 0$, $f_{xx}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ قيمة عظمى نسبية $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

(10) لتكن $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة

$$f(x,y) = x^4 + y^2 + x^2y$$

بيّن أن $(0,0)$ هي موضع تبلغ فيه الدالة قيمة صغرى نسبياً.

الحل:

$$f_x(x,y) = 4x^3 + 2xy \Rightarrow f_x(0,0) = 0$$
$$f_y(x,y) = 2y + x^2 \quad f_y(0,0) = 0$$

$\Longrightarrow$ $(0,0)$ نقطة حرجة للدالة f.

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 2y \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = 2 \quad \Rightarrow f_{yy}(0,0) = 2 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x \qquad f_{xy}(0,0) = 0$$

$$f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$$
$$\Delta = x^4 - 4x^4 = -3x^4 < 0$$

لاحظ أن في الحد لا يتغير إشارة الدالة موجبة (لأن مشاركة مربع أضاف y^2) $\Longleftarrow$ $f(x,y) > 0 = f(0,0)$.

(11) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = y^2 - y^4 - x^4$

أوجد النقاط الحرجة لـ f وحدد ما إذا كانت فيها قيم قصوى نسبية لـ f أو مرتبطة لفرجي.

الحل:

$$f_x(x,y) = -4x^3 \quad \Longrightarrow f_x(x,y) = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$f_y(x,y) = 2y - 4y^3 \Rightarrow f_y(x,y) = 0 \Rightarrow 2y - 4y^3 = 0 \Longrightarrow 2y(1-2y^2)$$
$$\Longrightarrow y = 0, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

لازم نطلع باقي النقاط.

$\Longrightarrow (0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ نقاط حرجة

$$f_{xx}(x,y) = -12x^2, \quad f_{yy}(x,y) = 2 - 12y^2$$
$$f_{xy}(x,y) = 0$$

٨ ٧

تتمة 11

تتمة التمرين $\boxed{11}$.

من أجل $(0,0)$ $f_{xy}(0,0)=0$ و $f_{yy}(0,0)=2$, $f_{xx}(0,0)=0$

$\Delta=0$

لا نحصل على الحل ، $N((0,0),\delta)$ جوار لـ $(0,0)$

ولكن في النقطة $(\frac{\delta}{2},0)\in N$ يكون $f(\frac{\delta}{2},0)=-\frac{\delta^4}{16}<0=f(0,0)$

وفي النقطة $(0,\alpha)\in N$ حيث $\alpha<\min(\frac{\delta}{2},1)$

من صفحة ١ $f(0,\alpha)=\alpha^2-\alpha^4=\alpha^2(1-\alpha^2)\geq 0=f(0,0)$

إذن $\alpha<1$ من تغير إشارة f هو جيب

$(0,0)$ ليست نقطة قيمة قصوى نسبية .

أما من أجل النقاط $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ و $(0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ فإن $\Delta=0$ أيضاً

$$f(0,\tfrac{\sqrt{2}}{2})=f(0,-\tfrac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2}{4}-\frac{4}{16}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$f(x,y)-f(0,\mp\tfrac{\sqrt{2}}{2})=y^2-y^4-x^4-\frac{1}{4}$$

$$=-\left[(y^4-y^2+\tfrac{1}{4})+x^4\right]$$

$$=-\left[(y^2-\tfrac{1}{2})^2+x^4\right]\leq 0$$

إذن فإن $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ $f(x,y)<f(0,\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$

إذن فإن $(0,\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$ هي قيمة عظمى نسبية بل وهي قيمة عظمى مطلقة

$\frac{9}{}$

النهاية