مبرهنة القيمة الوسطى لمتغير واحد

لتكن d دالة معرفة $d : [a,b] \longrightarrow R$ مغلق

d قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ المفتوح ، مستمرة في طرفي a ، b المجال.

عندئذ : يوجد نقطة c

$$\exists\, c \in\,]a,b[\,,\quad d(b) - d(c) = (b-a)\, d'(c)$$

حيث : $c = a + (b+a)\theta$

$0 < \theta < 1$

تعميم : $f : D \subseteq R^n \longrightarrow R$ مفتوح

ولتكن f

المشتقات الجزئية الأولى $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}$ موجودة ، مستمرة. (قابلة للاشتقاق) متكافئات

f مستمرة في محيط D

ستأخذ نقطتين $c, c+h$ من D ، عندئذ : تتطبيق النظرية السابقة :

$$f(c+h) - f(c) = \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c + \theta h)$$

$0 < \theta < 1$

$c = a$

$c + h = b$

$h = b - a$

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}(a + \theta(b-a))$$

لازم $(c+h) \in D$

مبرهنة :

لتكن f دالة معرفة على جزء مفتوح ومترابط D.

ولنفرض أنه لـ f مشتقات جزئية أولى ومستمرة على D.

وأن المشتق الجزئي بالنسبة لـ i

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

عندئذ تكون الدالة f دالة ثابتة.

$a, c^1, c^2 \dots c^{n-1}, b \quad : \quad a, b \in D$ مترابطة (لأن D مترابطة)

$$f(c^1) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (c_i^1 - a_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}(a + \theta)(c^1 \dots$$

$0 < \theta < 1$.

D مترابطة يمكن الوصول من أي نقطة إلى أي نقطة في D بخط واحد.

$(a, b \in D)$

بما أن D مترابطة ومفتوحة في $\mathbb{R}^n$ فإنه يمكننا الوصل بين a, b بخط مضلع

واقع بأكمله في D وليكن $L_1, L_2, \ldots L_n$

ورؤوسه تقع في النقاط $(a, c^1, c^2, \ldots \ldots c^{n-1}, b)$

فباستخدام المبرهنة السابقة في النقطتين a, c^1

$$f(c^1) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (c^1_i - a_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}(a+\theta)(c^1 - a)$$

$$0 < \theta < 1$$

بنفس الطريقة نبرهن أن $f(c^1) = f(c^2)$

وهكذا $f(a) = f(c^1) = f(c^2) = \ldots = f(b)$

* تذكرة بنظرية تايلور لمتغير واحد:

لتكن $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ولنفرض أن

$D \supseteq [x_0, x_0 + h]$

وأن لـ (φ) مشتقات مستمرة حتى المرتبة $(n+1)$

و φ مستمرة في النقاط المحيطية عندئذٍ:

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \frac{\varphi'(x_0)}{1!} h + \frac{\varphi''(x_0)}{2!} h^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} h + R_{n+1}$$

الباقي R_{n+1} يعطى (1) بصيغة لاغرانج

كل خط تحته سؤال في تحليل (3).

[illegible]

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$

$$0 < \theta < 1$$

صيغة كوشي:

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{n!} (1 - \theta')^n \varphi^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)$$

$$0 < \theta' < 1$$

من تكون المشتقات التفاضلية متساوية؟

١ - ١

تعميم المبرهنة تايلور في R^n :

<< نظرية تايلور المتغيرين << $f : D \subseteq R^n \longrightarrow R$

لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية $D \subseteq R^2$ ومستقرة R

D لم مجموعة مفتوحة ولنفرض أن لـ f مشتقات جزئية

حتى المرتبة $(m+1)$ على D وأن f مستمرة في المستقيم

المحيطية D، ولنفرض أن النقطتين (a, b)، $(a+h, b+k)$

والقطعة المستقيمة الواصلة بينهما تقع في D، ولنعرف الدالة φ:

حيث $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \varphi(t) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

نلاحظ أن φ قابلة للاشتقاق في المجال $[0, 1]$

وأن مشتقتها
$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(a+th, b+tk)$$

من قاعدة السلسلة $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$

$$= h \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk)$$

نعيد الاشتقاق بالنسبة لـ t.

$$\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} = h\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\quad) + k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\quad)\right]$$

$$+ k\left[h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\_\_) + \frac{k \partial^2 f}{\partial y^2}(\_\_)\right].$$

$$= \frac{h^2 \partial^2 f}{\partial x^2}(\quad) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\_\_) +$$

المشتقات المختلطة متساوية

حسب مبرهنة سابقة

$$= k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\quad) + \left(\frac{h \partial}{\partial x} + \frac{k \partial}{\partial y}\right)^2 f(a+th, b+tk)$$

بالاستفادة من المقابلة والرموز التفاضلية نجد أنها تشكل الثنائي

بالاستقراء نستنتج $p < m+1$ ... حيث أصغر من $m+1$

$$\frac{\partial^p \varphi(t)}{\partial t^p} = \frac{h^p}{1!}\frac{\partial^p f}{\partial x^p} + \frac{p\,h^{(p-1)}k}{(1!)}\frac{\partial^p F}{\partial x^{p-1}\partial y}(c)$$

$$+ \frac{p(p-1)}{(2!)}h^{(p-2)}k^2\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-2}\partial y^2}(c) + \cdots$$

$$+ \frac{p(p-1)\cdots(p-j+1)}{(j)!}h^{p-j}k^j\frac{\partial^p F}{\partial x^{p-j}\partial y^j}(c) + \cdots$$

$$+ k^p\frac{\partial^p f}{\partial y^p}(\underbrace{a+b\,h+b+t\,k}_{c})$$

نفس منشور ثنائي الحد

$$\frac{\partial^p \varphi(t)}{\partial t^p} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(a+th,\, b+tk)$$

نفس شكل $\dfrac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2}$

استفدت منه:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n a^{n-1} b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \cdots$$

وبالعودة إلى نشر تايلور من أجل متحول حقيقي يمكن كتابة التالي

بالتبديل بـ $x_0 = 0$, $h = 1$

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \frac{\varphi'(x_0)}{1!}h + \frac{\varphi''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots$$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + R_{m+1}$$

$$R_{m+1} = \frac{\varphi^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} \quad \text{"}\ 0<\theta<1\ \text{"}$$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}(0) + R_{m+1}$$

ولكن:

$$\varphi(t) = f(a+th,\, b+tk).$$ حيث

$\varphi(t)$: $f(a+tk,\, b+t$

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = h\frac{\partial F}{\partial x} + K\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^P \phi(t)}{\partial t^P} = \left(\frac{h\,\partial f}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial t}\right)^P F(\, , \,)$$

$$f(a+h, b+K) - f(a,b) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$$

$$+ R_{m+1}$$

"حيث الباقي يعطى بالشكل التالي"

$$R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f(a+\theta h, b+\theta K)$$

$$(0 < \theta < 1)$$

والباقي هو باقي تايلور

"ملاحظة"

إذا وجدت المشتقات الجزئية لـ f من جميع المراتب

مشتقات جزئية محدودة ومستمرة في المنطقة

في المنطقة والباقي يسعى نحو الصفر عندما $m \to \infty$

① $\lim_{m \to \infty} R_{m+1} = 0$

عندئذ نحصل على نشر تايلور

② $f(a+h, b+k) - f(a,b) = \sum \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$

نشر جوار (a,b)

ليس هاد بناياه حفظ

"نظرية يونغ"

إذا كانت الدالة f تحقق الشروط الواردة في نظرية تايلور: (شروط (a,b))

فإن الباقي تايلور يعطى بالدستور التالي:

$$R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f(a,b)$$

$$+ \eta(h,K)\left(\sqrt{h^2+K^2}\right)^{m+1}$$

$$\lim_{(h,K) \to (0,0)} \eta(h,K) = 0$$

/ /

اكتب الحدود الثلاث الأولى من متسلسلة تايلور في جوار النقطة $\binom{(a,b)}{(0,0)}$

$f(x) = e^x \cos y$

$$f(h,k) - f(0,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$$

$f(0,0) = 1$

$f_x(x,y) = e^x \cos y \implies f_x(0,0) = 1$

$f_{xx}(x,y) = e^x \cos y \implies f_{xx}(0,0) = 1$

اشتق بالنسبة لـ y $f_{yx}(x,y) = -e^x \sin y \implies f_{yx}(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = -e^x \sin y \implies f_y(0,0) = 0$

$f_{yy}(x,y) = -e^x \cos y \qquad f_{yy}(x,y) = -1$

بدنا نشتق بالنسبة لـ x $f_{xy}(x,y) = -e^x \sin \qquad f_{xy}(0,0) = 0$

نعوض:

$$e^h \cos k = 1 + \frac{1}{1!}(h + k(0)) + \frac{1}{2!}\left(h^2 f_{xx}(0,0) + 2hk\, f_{xy}(0,0) + k^2 f_{yy}(0,0)\right)$$

$$e^h \cos k = 1 + h + \frac{h^2 - k^2}{2}$$

وظيفة:

$f: R \to R \qquad f(x) = e^x \sin x$

أثبت أن متسلسلة تايلور لهذه الدالة حول النقطة 0 تعطى بالعلاقة التالية.

وأن هذه المتسلسلة متقاربة مهما كانت $x \in R$

$$e^x \sin x = \sum_{1}^{n} \frac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n$$

$e^x \sin x + e^x \cos x$

$e^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right)$