/ /

المحاضرة الثالثة عشر:

ب- إذا كانت العلاقة الجبرية تحوي على دالتين اختياريتين كلاهما يتعلق بدالة معلومة وهي من الشكل:

$$Z = f[u(x,y,z)] + g[v(x,y,z)]$$

- نشتق مرتين بالنسبة لـ: x ونشتق مرتين بالنسبة لـ: y.
- نحذف الثوابت من العلاقات الناتجة والعلاقة الجبرية.

مثال:

أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية للعلاقة:

$$Z = f(x+cy) + g(x-cy) \quad —— (1)$$

الحل:

لتكن $u = x+cy$ ، $v = x-cy$

- اشتقاق بالنسبة لـ x:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = P = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f' + g'$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = r = f'' + g'' \quad —— (2)$$

- نشتق العلاقة الجبرية بالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = q = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$q = f'(c) + g'(c)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = c^2 \cdot f'' + c^2 \cdot g'' \quad ---- (3)$$

من ② و ③ :

$$t = c^2 \cdot r \Rightarrow r = \frac{t}{c^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$ « م.ح.ت.م »

② - إذا كانت العلاقة الجبرية تحوي على دالة اختيارية تتعلق بدالتين معلومتين من الشكل:

$$F(u(x,y,z), v(x,y,z)) = 0$$

حيث: F دالة اختيارية و u ، v دالتين معلومتين عندها نشتق بالنسبة لـ x وبالنسبة لـ y فنحصل على معادلة من الشكل:

$$P(x,y,z) \cdot p + Q(x,y,z) \cdot q = R(x,y,z)$$

حيث: P ، Q ، R دوال معلومة وتسمى هذه المعادلة معادلة لاغرانج.

مثال: أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية للعلاقة:

$$F(x^2 + y^2, z) = 0$$

الحل:

- نفرض أنّ: $u = x^2 + y^2$ ، $v = z$
- المشتقات بالنسبة لـ x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= 2x \cdot \frac{\partial F}{\partial u} + p \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \quad --- (1)$$

- اشتقاق بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$= 2y\cdot\frac{\partial F}{\partial u} + q\cdot\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \quad --- (2)$$

نفرض أنّ : $\lambda = \frac{\partial F}{\partial u}$ ، $\mu = \frac{\partial F}{\partial v}$

وإنّ (1) و (2) عبارة عن جملة معادلتين ، الشرط اللازم والكافي كي يكون لها حل غير صفري هو أن يكون عدد الأمثال يساوي الصفر .

$$\left.\begin{array}{l} 2x\cdot\lambda + p\cdot\mu = 0 \\ 2y\cdot\lambda + q\cdot\mu = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x & p \\ 2y & q \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2x\cdot q - 2y\cdot p = 0 \Rightarrow x\cdot q - y\cdot p = 0$$

وهي الم.ت.ج.م وهي معادلة لاغرانج متجانسة .

المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى : شكلها :

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad --- (1)$$

الحل التام للمعادلة (1) . هو كل حل يحوي عدد من الثوابت الاختيارية يساوي عدد المتغيرات المستقلة وهو من الشكل :

$$f(x, y, z, c_1, c_2) = 0 \quad --- (2)$$

وهو يمثل عدد لانهائي من السطوح التكاملية للمعادلة (1) التي تختلف فيما بينها بقيم الثوابت c_1 ، c_2 .

- تعريف المغلف : هو المنحني الذي يمس بكل نقطة من نقاطه أحد السطوح التكاملية .

/ /

- الحل الشاذ: نفرض أن (2) هو الحل التام للمعادلة التفاضلية (1) عندئذ:
إذا كان هناك مغلفاً لهذه السطوح معادلته تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية (1) عندها نسمي معادلة المغلف هو الحل الشاذ لـ: (1).
- طريقة إيجاد المغلف:
- نشتق عبارة الحل التام بالنسبة للثوابت.
- نحذف الثوابت من العلاقات الناتجة وعلاقة الحل التام.
- نسمي بالتعريف السطوح الناتجة المحققة للمعادلة التفاضلية الجزئية بالحل الشاذ للمعادلة التفاضلية الجزئية.

مثال: أوجد المغلفات (الحلول الشاذة للمعادلة إن وجدت):

$$z = p.x + q.y - p^2 - q^2 \quad --- (1)$$

إذا علمت أن حلها التام:

$$z = a.x + b.y - a^2 - b^2 \quad --- (2)$$

الحل:

- نشتق (2) بالنسبة لـ a:

$$0 = x - 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2} \quad (i)$$

- نشتق (2) بالنسبة لـ b:

$$0 = y - 2b \Rightarrow b = \frac{y}{2} \quad (ii)$$

نعوض: (i) (ii) في (2):

$$z = \frac{x}{2}.x + \frac{y}{2}.y - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$$

$$\Rightarrow z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \quad --- (3)$$

- التحقق من أن (3) تحقق المعادلة (1):

$$P = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2} \quad , \quad q = \frac{2y}{4} = \frac{y}{2}$$

- نعوض في (3) ونتحقق :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4} \overset{?}{=} \frac{x}{2}\cdot x+\frac{y}{2}\cdot y-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}$$

إذاً :

$3=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}$ هو حل شاذ .

- انتهت المحاضرة الثالثة عشر -