المحاضرة الثامنة

مبرهنة ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي و $A \subset X$ عندئذٍ فإن

A مغلقة في $(X, \tau) \iff A' \subset A$

الإثبات: لنفرض أن A مغلقة وبالتالي $A^c \in \tau$

لنبرهن أن $A^c \subset (A')^c$ فيتم المطلوب

ليكن $x \in A^c$ (A^c مفتوحة) وبالتالي توجد $A^c = B \in \tau$

$B \cap A \setminus \{x\} = B \cap A = \phi \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow$

$x \in (A')^c$

$\Leftarrow$) نفرض أن $A' \subset A$ ولنبرهن أن $A^c \in \tau$

ليكن $x \in A^c$ ولنبرهن أنه توجد $B \in \tau$ بحيث $x \in B$ و $B \subset A^c$

فيكون $x \in (A^c)^\circ$ وذلك من أجل كل $x \in A^c$ وبالتالي

$(A^c)^\circ = A^c$ وحسب نتيجة سابقة يكون $A^c \in \tau$

$x \in A^c \Rightarrow x \notin A'$ $(A' \subset A)$

$\Rightarrow \exists B \in \tau : x \in B \wedge B \cap A \setminus \{x\} = \phi$

$\Rightarrow B \cap A = \phi \Rightarrow B \subset A^c$

تعريف «غلاقة مجموعة» ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي و

لتكن $A \subset X$ سنرمز بـ $\bar{A}$ لتقاطع كل المجموعات المغلقة والتي

تحوي المجموعة A وندعو $\bar{A}$ بغلاقة أو لصاقة A

نتائج ① $\bar{A}$ مغلقة في (X, τ) لأنها تقاطع لمغلقات

② إذا كانت F مجموعة مغلقة تحوي A فإن $A \subset \bar{A} \subset F$

③ $\bar{A}$ هي أصغر مغلقة تحوي A

④ A مغلقة $\Longleftrightarrow$ $\bar{A} = A$

($\Leftarrow$) A مغلقة ، واضح لأن $\bar{A}$ هي أصغر مغلقة تحوي A

($\Rightarrow$) $\bar{A} = A$ بما أن $\bar{A}$ مغلقة في (X,τ) فإن A مغلقة في (X,τ)

مثال: لتكن $X = \{a,b,c,d\}$ ولتكن التبولوجيا التالية:

$$\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b,c\}\}$$

أوجد $\overline{\{b\}}$ ، $\overline{\{c,d\}}$ ، $\overline{\{a\}}$ ، $\overline{\{a,d\}}$

لنوجد كل المغلقات في (X,τ) وهي:

$$X, \emptyset, \{a,c,d\}, \{a,d\}$$

$$\overline{\{a,d\}} = X \cap \{a,c,d\} \cap \{a,d\} = \{a,d\}$$

$$\overline{\{a\}} = X \cap \{a,c,d\} \cap \{a,d\} = \{a,d\}$$

$$\overline{\{c,d\}} = X \cap \{a,c,d\} = \{a,c,d\}$$

$$\overline{\{b\}} = X$$

مبرهنة: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A \subset X$ فإن $A \cup A'$ مغلقة في (X,τ)

الإثبات:

لنبرهن أن $A^c \cap (A')^c = (A \cup A')^c$ مفتوحة فيتم المطلوب

من أجل ذلك يكفي إثبات أن:

$$A^c \cap (A')^c = (A^c \cap (A')^c)^\circ$$

أي لنبرهن أنه من أجل كل $x \in A^c \cap (A')^c$ توجد $B \in \tau$ بحيث

$$x \in B \wedge B \subset A^c \cap (A')^c$$

أي $x \notin A \wedge x \notin A' \Leftarrow x \in A^c \cap (A')^c$

$$\exists B \in \tau : x \in B \wedge B \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$$

$$B \cap A = \emptyset \quad (x \notin A)$$

$\Rightarrow B \subset A^c$ ... (1)

وبذلك يكون تبقى إثبات أن $B \subset (A')^c$ ليتم المطلوب

أي لنبرهن أن كل $y \in B$ ليست نقطة تجمع لـ A

بما أن $y \in B \subset A^c$ و $B \in \tau$

$(A \cap B = \emptyset)$ $B \cap A \setminus \{y\} = \emptyset \Rightarrow y \notin A' \Rightarrow B \subset (A')^c$ ... (2)

من (1) و (2) يكون $\cancel{B \subset (A^c}$

$B \subset (A \cup A')^c \Leftarrow B \subset A^c \cap (A')^c$

مبرهنة: ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي، $A \subset X$ عندئذٍ:

$$\bar{A} = A \cup A'$$

الإثبات:

$A \cup A'$ مغلقة في (X, τ) من المبرهنة السابقة وهي تحوي A وبما أن $\bar{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A فإن

$$\bar{A} \subset A \cup A'$$

ولنبرهن الاحتواء المعاكس:

لدينا $A \subset \bar{A}$ بقي إثبات أن $A' \subset \bar{A}$

$$A \subset \bar{A} \Rightarrow A' \subset (\bar{A})' \subset \bar{A}$$

F مغلقة $\Leftrightarrow F' \subset F$ ، من نتيجة سابقة

وبالتالي يكون $A \cup A' \subset \bar{A}$ ومما سبق نجد أن $\bar{A} = A \cup A'$.

وهو المطلوب

نتائج: ليكن الفضاء التبولوجي (X,τ) ، $A,B\subset X$

① $\bar{\phi}=\phi$ ، $\bar{X}=X$

② $A\subset B \Rightarrow \bar{A}\subset \bar{B}$

$A\subset B \Rightarrow A'\subset B' \Rightarrow \bar{A}=A\cup A'\subset B\cup B'=\bar{B}$

③ $\overline{(\bar{A})}=\bar{\bar{A}}=\bar{A}$

لأن $\bar{A}$ مغلقة فهي تساوي غلاقها

④ $\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$

$(A\cup B)'=A'\cup B' \Rightarrow \overline{A\cup B}=(A\cup B)\cup(A\cup B)'$

$=(A\cup B)\cup(A'\cup B')$

$=(A\cup A')\cup(B\cup B')=\bar{A}\cup\bar{B}$

طريقة ثانية: حسب ② $A,B\subset A\cup B$

$\bar{A},\bar{B}\subset\overline{A\cup B} \Longrightarrow \bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$

$\bar{A}\cup\bar{B}$ هي مجموعة مغلقة وتحوي $A\cup B$ ومنه $\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$

ومن الاحتواءين $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cup B}$

نتيجة:

ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي و $A\subset X$ عندئذٍ:

① إذا كانت $B\in\tau$ و $B\subset A$ فإن $B\subset A^{\circ}$ أي

$\tau\ni B\subset A \Rightarrow B\subset A^{\circ}$

لأنه من أجل كل $x\in B$ فإن $x\in A^{\circ}$

② A° هي أكبر مفتوحة محتواة في A

③ A° = اجتماع كل المفتوحات المحتواة في A

أ. [illegible]