شلاح

6/4/2014 المحاضرة السادسة

مبرهنة ليكن $F, G : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دوال عاملية

$f : F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي

إذا كان المورفيزم الدالي f إيزومورفيزم ، عندئذ يوجد مورفيزم دالي وحيد

$g : G \longrightarrow F$ يحقق :

$$f \cdot g = I_G \quad , \quad g \cdot f = I_F$$

الإثبات :

لنفرض أن $f : F \longrightarrow G$ إيزومورفيزم دالي ، عندئذ حسب التعريف

أياً كان $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ فإن المورفيزم $f(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$

يكون إيزومورفيزم ويكون المخطط الآتي

تبديلي ..

وذلك أياً كان $u : A \longrightarrow B \in \mathcal{L}_1(A,B)$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "f(B)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

وبما أن $f(A)$ إيزومورفيزم عندئذ يوجد مورفيزم :

$$g(A) : G(A) \longrightarrow F(A)$$

يحقق

$$(*) \begin{cases} g(A) \cdot f(A) = I_{F(A)} \\ f(A) \cdot g(A) = I_{G(A)} \end{cases}$$

لنعرف $g : G \longrightarrow F$ بالشكل :

$$\forall \; A \in ob(\mathcal{L}_1) : g(A) : G(A) \longrightarrow F(A)$$

والذي يحقق الشرط (*)

ليكن $\boxed{v : X \longrightarrow Y \in \mathcal{L}_1(X,Y)}$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي ..

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "g(X)"] \arrow[d, "G(v)"'] & F(X) \arrow[d, "F(v)"] \\ G(Y) \arrow[r, "g(Y)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

أي أن

$$F(v) \cdot g(X) = g(Y) \cdot G(v)$$

$$I_1 = F(x).g(X) = I_{F(Y)} . F(x) . g(X)$$
$$= g(Y) . f(Y) . F(x) . g(X)$$
$$= g(Y) . G(x) . f(Y) . g(X)$$

ذلك لأن $G(x).f(X) = f(Y).F(x)$ «من المخطط التبديلي»

$$= g(Y) . G(x) . I_{G(X)}$$
$$= g(Y) . G(x) =$$
$$= I_2$$

نتيجة: بهذا الشكل نجد أن $g : G \to F$ هومومورفيزم دالي

يحقق العلاقات

$$f(A) . g(A) = I_{G(A)}$$
$$g(A) . f(A) = I_{F(A)}$$

وذلك لأي كان A : $\quad f.g = I_G , \quad g.f = I_F$

يعني إثبات الوحدانية.

نفرض أنه يوجد هومومورفيزم دالي آخر $h : G \to F$

يحقق $f.h = I_G \qquad h.f = I_F$

ومنه لأي $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ كان:

$$h(A) . f(A) = I_{F(A)} \quad , \quad f(A) . h(A) = I_{G(A)}$$

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "h(A)"] \arrow[dr] & F(A) \arrow[d, "I_{F(A)}"] \\
& F(A)
\end{tikzcd}$$

وأن $h(A) = I_{F(A)} . h(A)$

$$= g(A) . f(A) . h(A)$$
$$= g(A) . (f(A) . h(A))$$
$$= g(A) . I_{G(A)}$$

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "G(A)"] & F(A) \\
G(A) \arrow[u, "I_{G(A)}"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow h = g$$

مبرهنة ليكن $F, G : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دوال غير مباشرة

وليكن $f : F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي

إذا كان المورفيزم الدالي f ايزومورفيزم ، عندئذ يوجد مورفيزم وحيد

$$g : G \longrightarrow F$$

بحيث : $g \cdot f = I_F$ ، $f \cdot g = I_G$

الدنفس الإثبات ، فقط بتغيير المخطط ليصبح :

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "f(A)"] & G(A) \\
F(B) \arrow[u, "F(u)"] \arrow[r, "f(B)"] & G(B) \arrow[u, "G(u)"']
\end{tikzcd}$$

تمرين لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $Set's$ فئة المجموعات ..

و $F : \mathcal{L} \longrightarrow Set's$ دالي مباشر

وجدنا سابقاً أنه إذا كان $X \in ob(\mathcal{L})$ فإنه يوجد دالي مباشر

$$h_X : \mathcal{L} \longrightarrow Set's$$

لنفرض $Hom(h_X, F)$ هو صف كل المورفيزمات الدالية من h_X إلى F

مبرهنة لتكن $\mathcal{L}$ فئة

و $F : \mathcal{L} \longrightarrow Set's$ دالي مباشر

عندئذ إذا كان $X \in ob(\mathcal{L})$

يوجد تطبيق متباين وغامر

$$\varphi : Hom(h_X, F) \longrightarrow F(X) \text{ .... (الحفظ)}$$

حيث $h_X : \mathcal{L} \to Set's$ هنالك صف من الدوال المباشرة ، لأجل كل X متغير

الإثبات :

ليكن $f \in Hom(h_X, F)$

عندئذ : $f : h_X \longrightarrow F$ مورفيزم دالي يحقق :

إذا كان $Y \in ob(\mathcal{L})$ فإن $f(Y) : h_X(Y) \longrightarrow F(Y)$ مورفيزم يحقق

لأجل كل مورفيزم $u : Y \longrightarrow Y'$ المخطط الآتي تبديلي :

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \\ {\scriptstyle h_X(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(u)} \\ h_X(Y') & \longrightarrow & F(Y') \end{array}$$

أو :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X,Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \\ {\scriptstyle h_X(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(u)} \\ \mathcal{L}(X,Y') & \longrightarrow & F(Y') \end{array}$$

«شكل متصل»

توضيح

$F(u) \cdot f(X) = f(Y') \cdot h_X(u)$

لدينا $f(X) = h_X(X) \rightarrow F(X)$

$\mathcal{L}(X,X) \rightarrow F(X)$

المطابق $\rightarrow I_X$

$\alpha(f) = f(X)(I_X) \in F(X)$

نعرف α بالشكل التالي:

من أجل $Y = X$ فإن:

المعرف $\boxed{\alpha(f) = f(X)(I_X)}$

نعرف علاقة أخرى:

$$\beta : F(X) \rightarrow Hom(h_X, F)$$

ليكن $\xi \in F(X)$ ونعرف: $\beta(\xi) : h_X \rightarrow F$

لأي كان $Y \in ob(\mathcal{L})$ نضع: $\beta(\xi)(Y) : h_X(Y) \rightarrow F(Y)$

$: \mathcal{L}(X,Y) \rightarrow F(Y)$

مجموعة   مجموعة

«نريد تعريف علاقة بين المجموعتين»

ليكن $u : X \rightarrow Y \in \mathcal{L}(X,Y)$

$$\beta(\xi)(Y)(u) = F(u) \cdot \xi$$

أثبت أن β مورفيزم دالي

انتهت المحاضرة