المحاضرة الحادية عشر

تمرين:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad ; t > 0$$

$$u(x,0) = 0 \; , u(0,t) = u(5,t) = 0$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 3\cdot\sin 2\pi x - 2\sin 5\pi x$$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس بالنسبة للمتغير t:

$$U''(x,s) = \frac{1}{4}\left[s^2\cdot U(x,s) - s\cdot u(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right]$$

$$4\cdot U''(x,s) = s^2\cdot U(x,s) - 3\sin 2\pi x + 2\sin 5\pi x$$

$$4U'' - s^2\cdot U = -3\sin 2\pi x + 2\sin 5\pi x \quad \text{---} \; (*)$$

وهذه معادلة تفاضلية غير متجانسة الحل العام لها هو الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة + الحل الخاص لغير المتجانسة.

- لنوجد الحل العام للمتجانسة الموافقة

$$4U'' - s^2\cdot U = 0$$

وبالتالي: المعادلة المميزة ستكون هي:

$$4\cdot\lambda^2 - s^2 = 0$$

ومنه: $\lambda = \mp\frac{s}{2}$ ويكون الحل العام من الشكل:

$$U_1 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$U_1 = c_1\cdot e^{s/2\cdot x} + c_2\cdot e^{-s/2\cdot x}$$

- ولنوجد الآن الحل الخاص لغير المتجانسة وهو من الشكل

$$U_2 = A\cdot\sin 2\pi x + B\cdot\sin 5\pi x$$

$$U_2' = 2\pi A\cdot\cos 2\pi x + 5\pi\cdot B\cos 5\pi\cdot x$$

$$U_2'' = -4\pi^2\cdot A\cdot\sin 2\pi x - 25\cdot\pi^2\cdot B\cdot\sin 5\pi x$$

/ /

نعوض في (*) :

$$-16\pi^2 . A . \sin 2\pi x - 100\pi^2 . B . \sin 5\pi x - S^2 . A . \sin 2\pi x$$
$$- S^2 . B . \sin 5\pi x = -3 \sin 2\pi x + 2 \sin 5 \pi x .$$
$$- A (16\pi^2 + S^2) \sin 2\pi x - B (100 \pi^2 + S^2) \sin 5\pi x$$
$$= -3 \sin 2\pi x + 2 \sin 5\pi x$$

$$A = \frac{3}{S^2 + 16\pi^2} \quad , \quad B = \frac{-2}{S^2 + 100\pi^2}$$

- ومنه الحل العام للمعادلة الغير متجانسة هو :

$$U = U_1 + U_2 = c_1 . e^{\frac{S}{2} . x} + c_2 . e^{-\frac{S}{2} . x} + \frac{3}{S^2 + 16\pi^2} . \sin 2\pi x$$
$$- \frac{2}{S^2 + 100\pi^2} . \sin 5 \pi .$$

- حساب الثوابت C_1 , C_2 وذلك من شروط البدء :

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow \int_0^\infty u(0,t) . e^{-S.t} . dt = 0 = U(0, S)$$

$$u(5,t) = 0 \Rightarrow U(5, S) = \int_0^\infty u(5,t) . e^{-St} dt = 0 .$$

⊙. نعوض $\boxed{x = 0}$ في الحل العام :

$$U(0, S) = c_1 + c_2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 .$$

⊙ نعوض $\boxed{x = 5}$ في الحل العام :

$$U(5, S) = c_1 . e^{\frac{S}{2}.5} + c_2 . e^{-\frac{S}{2}.5} + 0 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 . e^{\frac{S}{2}.5} - c . e^{-\frac{S}{2}.5} = 0$$
$$\Rightarrow c_1 (e^{\frac{S}{2}.5} - e^{-\frac{S}{2}.5}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

- ومنه الحل العام هو :

$$U = \frac{3}{S^2 + 16\pi^2} . \sin 2\pi x - \frac{2}{S^2 + 100\pi^2} . \sin 5 . \pi x$$

$$L^{-1}[U] = 3 \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{S^2+16\pi^2}\right] \cdot \sin 2\pi x - 2 L^{-1}\left[\frac{1}{S^2+100\pi^2}\right] \cdot \sin 5\pi x$$

$$U(x,t) = \frac{3}{4\pi} \sin 2\pi x \cdot \sin 4\pi t - \frac{2}{10\pi} \sin 5\pi x \cdot \sin 10\pi t.$$

المعادلات التفاضلية الجزئية

- تعريف المشتق الجزئي:

إذا كان: $Z = Z(x,y)$ فإنّ:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Z(x+\Delta x, y) - Z(x,y)}{\Delta x}$$

- نسميه المشتق الجزئي للدالة Z من المرتبة الأولى ... بالنسبة لـ x باعتبار أنّ y ثابتة ومن جهة أخرى فإنّ:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{Z(x, y+\Delta y) - Z(x,y)}{\Delta y}$$

- نسميه المشتق الجزئي للدالة Z من المرتبة الأولى .... بالنسبة لـ: y باعتبار أنّ x ثابتة.

⊙ المشتق الجزئي من المرتبة (n):

$$\frac{\partial^n Z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n Z}{\partial y^n}, \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-1} \cdot \partial y}, \frac{\partial^n Z}{\partial x \cdot \partial y^{n-1}}$$

⊙. التفاضل الكلي: يُعطى التفاضل الكلي للسطح: $F(x,y,Z)=0$ بالعلاقة:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial Z} = 0.$$

تعميم هذه العلاقة: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot dx_n = 0$$

/ /

إذا كانت: $Z = Z(x, y)$ يكون التفاضل الكلي:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot dy$$

إذا كانت:

$Z = Z(x, y)$ وكانت: $x = x(t)$ ، $y = y(t)$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

إذا كان: $Z = Z(x, y)$ وكانت:

$$x = x(t_1, t_2)$$
$$y = y(t_1, t_2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t_1} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t_2} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_2}$$

إذا كانت: $F(x, y) = 0$ دالة ضمنية وكانت y تابعة لـ x عندها:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

- إذا كانت: $F(x, y, z) = 0$ وكانت $z(x, y)$ عندها:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

، $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

تعاريف: ⊙. تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية:
نسمي بالتعريف كل معادلة تحتوي على مشتق جزئي واحد على الأقل بمعادلة تفاضلية جزئية ونرمز لها بـ: م.ت.ج.
⊙. نقول الدالة $u(x,y)$ هي حل للمعادلة التفاضلية الجزئية إذا حولت المعادلة التفاضلية إلى مطابقة.
⊙ الحل العام: هو الحل الذي يحتوي على عدد من الدوال المستقلة الاختيارية وعددها يساوي رتبة المعادلة التفاضلية.
⊙ الحل الخاص: هو الحل الذي يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار أو بإعطاء الثوابت قيم عددية.

ملاحظة: إنّ حل المعادلة التفاضلية الجزئية يمثل سطحاً ندعوه بالسطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية، أي أنّ حل المعادلة التفاضلية الجزئية هو إيجاد مجموعة السطوح التكاملية لها.
* إذا كانت: $z = z(x,y)$، نقول عن المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى هي كل معادلة من الشكل:

$$G_1(x,y,z,p,q) = 0$$

والمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية هي من الشكل:

$$G_2(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0$$

حيث أنّ:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad , \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad , \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}$$

منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية: (تشكيل المعادلة التفاضلية الجزئية)
إنّ حذف وسطاء اختيارية من معادلة جبرية لعدة متغيرات يقود إلى معادلة تفاضلية جزئية

/ /

أولاً: الوسطاء الاختيارية ثوابت كيفية :

(أ). العلاقة الجبرية تحوي على ثابت اختياري واحد لها الشكل :

$$F(x, y, z, c_1) = 0$$

عندئذٍ يتم حذف الثابت بـ :

- حذف الثابت من: $F(\,)=0$ ومن المعادلة الناتجة من التفاضل بالنسبة لـ: x : $G_1(x, y, z, P) = 0$
- حذف الثابت من: $F(\,)=0$ ومن المعادلة الناتجة من التفاضل بالنسبة لـ: y : $G_2(x, y, z; q) = 0$
- نحذف الثابت من G_1 ، G_2 معاً فنحصل على المعادلات التفاضلية الجزئية.

(ب). العلاقة الجبرية تحوي على ثابتين اختياريين.

$$F(x, y, z, c_1, c_2) = 0 \quad \text{--- (1)}$$

عندئذٍ: نشتق بالنسبة لـ x: $G_1(x, y, z, P) = 0$ --- (2)

نشتق بالنسبة لـ y: $G_2(x, y, z, q) = 0$ --- (3)

- نحذف الثابتين من المعادلات (1) ، (2) ، (3) فنحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية: $G_3(x, y, z, P, q) = 0$

(ج). العلاقة الجبرية تحوي على ثلاث ثوابت اختيارية :

$$F(x, y, z, c_1, c_2, c_3) = 0$$

- نشتق بالنسبة لـ: x : $G_1(x, y, z, P) = 0$ --- (1)
- نشتق بالنسبة لـ: y : $G_2(x, y, z, q) = 0$ --- (2)
- نشتق (1) بالنسبة لـ x أو بالنسبة لـ y و نشتق (2) بالنسبة لـ: x أو بالنسبة لـ: y ، فنحصل على المعادلات التفاضلية من الشكل:

$$G_3(x, y, z, P, q, r, S, t) = 0$$

ملاحظة:

- إذا كان عدد الثوابت الاختيارية يساوي عدد المتغيرات المستقلة فإننا نحصل على معادلة تفاضلية جزئية واحدة تقبل المعادلة حلاً لها.
- إذا كان عدد الثوابت يزيد أو يقل عن عدد المتغيرات المستقلة فإننا نحصل على عدة معادلات تفاضلية جزئية تقبل المعادلة الجبرية حلاً لها.

-انتهت المحاضرة الحادية عشرة-