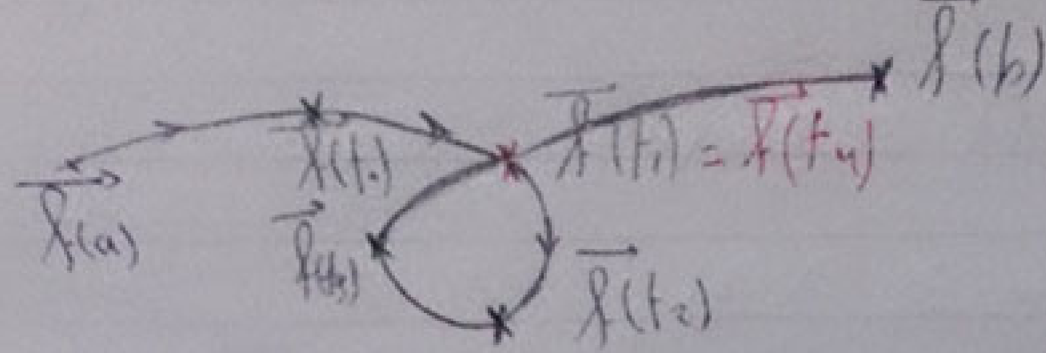
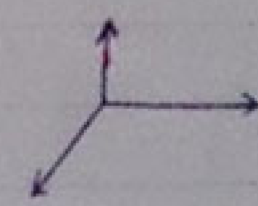
المحاضرة الحادية عشر   ٢٢/٢/٢٠١٤

المنحنيات: نعرف المنحني ((ℓ)) كما يلي

$\vec{f}:[a,b] \longrightarrow R^3$

$\vec{f}(t)=(x(t),y(t),z(t))=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$





خواص المنحنيات:

1) نقول عن ℓ أنه مغلق $\iff$ $\vec f(a)=\vec f(b)$

2) نقول عن $r_0 \in \ell$ نقطة من المنحني أنها مضاعفة اذا وفقط اذا

$\exists\, t_1 \neq t_2 \in [a,b] : \vec f(t_1)=\vec f(t_2)$

3) نقول عن المنحني ℓ أنه بسيط $\iff$ لا يحوي نقاط مضاعفة

4) نقول عن $t_0 \in [a,b]$ أنها شاذة $\iff$ $\vec f'(t_0)=0$

5) يقال ℓ أملس $\iff$ لا يحوي نقاط شاذة.

شعاع واحدة المماس:

ليكن ℓ منحني أملس عندها نعرف شعاع واحدة المماس لـ ℓ بأنه

$$\vec T(t)=\frac{\vec f'(t)}{|\vec f'(t)|}$$

طول المنحني:

نعرف طول المنحني من a الى t بأنه

$$S(t)=\int_a^t |\vec f'(t)|\,dt$$

a ← بداية المجال

ملاحظة:

$S'(t)=|\vec f'(t)|$

1) لتغير متحول t بدلالة S ثم نعوض في $\vec f$

$\vec f(s)=(f_1(s),f_2(s),f_3(s))$

$$\hat{S} = \int_{S(0)=0}^{S} \|\vec{f}'(s)\| \, ds$$

نشتق بالنسبة ل s

$$\boxed{\vec{T}(s) = \vec{f}'(s)} \qquad \hat{S}'(s) = \|\vec{f}'(s)\| \Rightarrow 1 = \|\vec{f}'(s)\|$$

أي أن

$$\vec{f} : [0, \Pi] \longrightarrow R^3$$

تمرين

$$\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2\pi} t)$$

أوجد $\vec{T}$ بدلالة s

$$\left.\begin{aligned} &\vec{f}'(t) = (-\sin t, \cos t, \frac{1}{2\pi}) \\ &\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{4\pi^2}} = \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{T}(t) = (-\frac{1}{\alpha}\sin t, \frac{1}{\alpha}\cos t, \frac{1}{2\pi\alpha})$$

$$S = \int_0^t \|\vec{f}'(t)\| \, dt = \int_0^t \alpha \, dt = \alpha t \qquad ②$$

$$t = \frac{S}{\alpha} \Leftarrow S = \alpha t \qquad ③$$

$$\vec{f}(s) = (\cos(\frac{s}{\alpha}), \sin(\frac{s}{\alpha}), \frac{1}{2\pi}\frac{s}{\alpha})$$

$$\vec{f}'(s) = (-\frac{1}{\alpha}\sin(\frac{s}{\alpha}), \frac{1}{\alpha}\cos(\frac{s}{\alpha}), \frac{1}{2\pi\alpha})$$

$$\|\vec{f}'(s)\| = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4\pi^2\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} = \frac{1}{\alpha}\alpha = 1$$

$$\vec{T}(s) = \vec{f}'(s) = (-\frac{1}{\alpha}\sin\frac{s}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\cos(\frac{s}{\alpha}), \frac{1}{2\pi\alpha})$$