• مبرهنة: لتكن لدينا البيان $G(V;E)$ عندئذٍ: إنّ البيان G بيان نصف أويلري إذا وفقط إذا كان البيان G مترابط ويحوي عقدتين مزدوجتين فقط.

البرهان:

($\Rightarrow$): لنفرض أنّ G بيان نصف أويلر عندئذٍ G يحوي على طريق ولتكن: $w = \langle x, \ldots, y \rangle$ وهذا الطريق يمر بجميع عقد وأضلاع البيان G، وبالتالي إذا أضفنا الضلع $e = (x,y)$ إلى البيان G نحصل على البيان $G'(V; E \cup \{e\})$ ونلاحظ أنّ G' بيان أويلر (بإضافة الضلع $e=(x,y)$ إلى الطريق w ينغلق هذا الطريق ويصبح دائرة كي دائرة أويلر لأنّه مر بجميع أضلاع وعقد البيان G')، وكما نعلم بيان أويلر جميع عقده زوجية:

$$deg(y) = 2m,\ deg(x) = 2r\ ;\ m,r \in \mathbb{Z}^{+*}$$

وبعد حذف الضلع e نعود إلى البيان G ويصبح كل من $deg(x) = 2r-1$ و $deg(y) = 2m-1$ أي أنّ العقدتين x,y مزدوجتين وباقي العقد زوجية كما في البيان G.

($\Leftarrow$): نفرض أنّ البيان G يحتوي على عقدتين مزدوجتين فقط $\forall x,y$ أي:

$$deg(x) = 2r+1,\ deg(y) = 2m+1\ ;\ r,m \in \mathbb{Z}^{*+}$$
$$\forall z \in (V - \{x,y\}) : deg(z) = 2l : l \in \mathbb{Z}^{+*}$$

نضيف ضلع جديد $e=(x,y)$ إلى البيان G فنحصل على بيان جديد $H(V; E \cup \{e\})$ في هذا البيان أصبح لدينا:

$deg(x) = 2r+1+1 = 2(r+1)$ زوجي

$deg(y) = 2m+1+1 = 2(m+1)$ زوجي

وبالتالي جميع عقد البيان H زوجية وحسب مبرهنة سابقة نجد أنّ H هو بيان أويلر (مترابط وعقده زوجية) وبالتالي يحوي دائرة أويلر C في H نحذف الضلع e من الدائرة C فنحصل على طريق أويلر لا في البيان G و بالتالي البيان G بيان نصف أويلر.

ملاحظة: كل بيان أويلر يمكن اعتباره نصف أويلر لكنّ العكس غير صحيح بالضرورة. نعتبر أنّ البيان المترابط هو بيان أويلر.

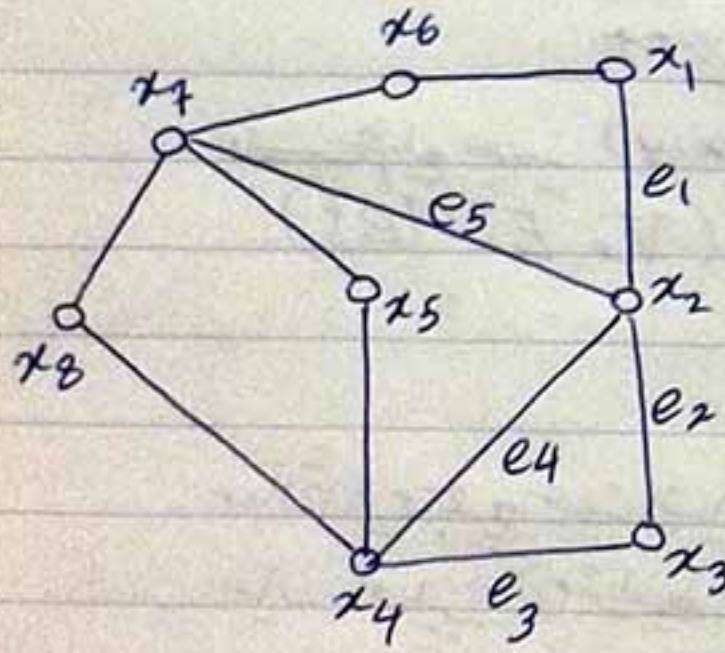
خوارزمية فلوري (Fleury) لإيجاد دوائر أويلر:

ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ بيان أويلر، للحصول على دائرة أويلرية في البيان G نطبق الخطوات التالية:

1. نختار عقدة عشوائية $x_0 \in V$ وننشئ طريقاً أبتدأ بهذه العقدة وليكن هذا الطريق: $T_j = \langle x_0, e_1, x_1, \ldots, e_j, x_j \rangle$
2. نختار الضلع e_{j+1} من $E - \{e_1, \ldots, e_j\}$ حيث:
   - e_{j+1} يؤثر على العقدة x_j
   - الضلع e_{j+1} ليس جسراً في البيان: $G_j = G - \{e_1, \ldots, e_j\}$ إلا إذا لم يكن هناك مسار آخر.

   نضع $T_{j+1} = \langle x_0, e_1, x_1, \ldots, x_j, e_{j+1}, x_{j+1} \rangle$
3. نكرر الخطوة 2 حتى نصل إلى حالة لا يمكن فيها التكرار. (أي حتى يصبح البيان $G_j = G - \{e_1, \ldots, e_j\}$ خالي)

مثال توضيحي:



ليكن البيان التالي بيان أويلر

1. نختار $x_0 = x_1$ ونشئ الطريق $T_4 = \langle x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4 \rangle$
2. نختار الضلع $e_4 = (x_4, x_2)$ (يحقق الشروط) ونضع:

$T_5 = \langle x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4, e_4, x_2 \rangle$

- نختار الضلع $e_5 = (x_2, x_7)$ (من الشروط) ونضع:

$T_6 = \langle x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4, e_4, x_2, e_5, x_7 \rangle$

- لا نستطيع اختيار الضلع $e_6 = (x_7, x_8)$ لأنه جسر في البيان:

لذلك نختار $e_7 = (x_7, x_8)$ في $G - \{e_1, \ldots, e_5\}$ وبالتالي:

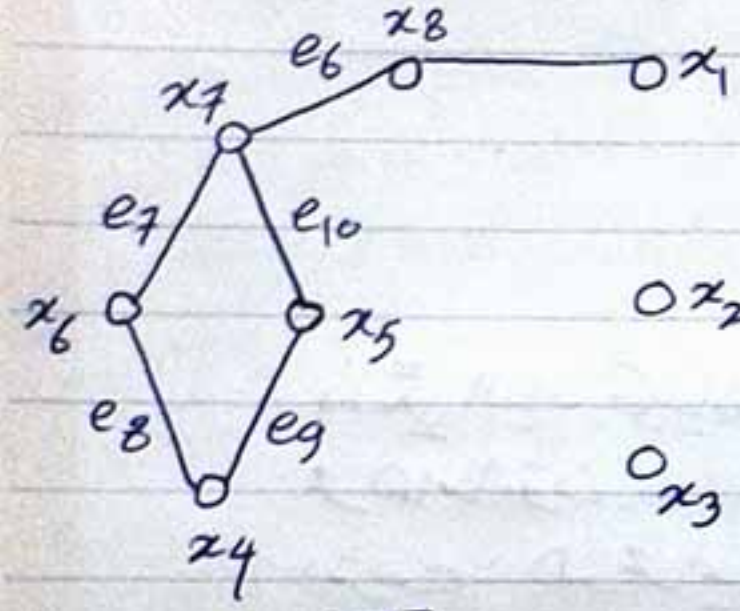
$T_7 = \langle x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4, e_4, x_2, e_5, x_7, e_7, x_6 \rangle$

- نختار $e_8=(x_6,x_4)$ (ضمن الشروط) وبالتالي:

$T_8=\langle x_1,e_1,x_2,e_2,x_3,e_3,x_4,e_4,x_2,e_5,x_7,e_7,x_6,e_8,x_4\rangle$

- نختار $e_9=(x_4,x_5)$ وبالتالي:

$T_9=\langle x_1,e_1,x_2,e_2,x_3,e_3,x_4,e_4,x_2,e_5,x_7,e_7,x_6,e_8,x_4,e_9,x_5\rangle$



- نختار $e_{10}=(x_5,x_7)$ وبالتالي:

$T_{10}=\langle x_1,e_1,x_2,e_2,x_3,e_3,x_4,e_4,x_2,e_5,x_7,e_7,x_6,e_8,x_4,e_9,x_5,e_{10},x_7\rangle$

- نختار $e_6=(x_7,x_8)$ وبالتالي:

$T_{11}=\langle x_1,e_1,\dots\dots,e_{10},x_7,e_6,x_8\rangle$

- نختار $e_{12}=(x_8,x_1)$ وبالتالي:

$T_{12}=\langle x_1,e_1,\dots\dots,e_{10},x_7,e_6,x_8,e_{12},x_1\rangle$

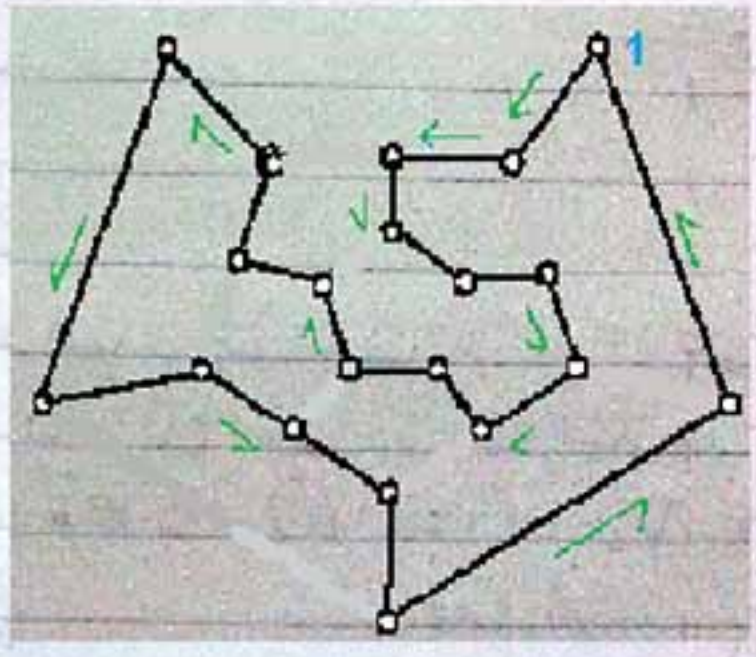
[3] الآن لا نستطيع تكرار الخطوة [2] لأنّ $\phi=G_{12}=G-\{e_1,\dots,e_{12}\}$ وبالتالي T_{12} هي دائرة أويلر.

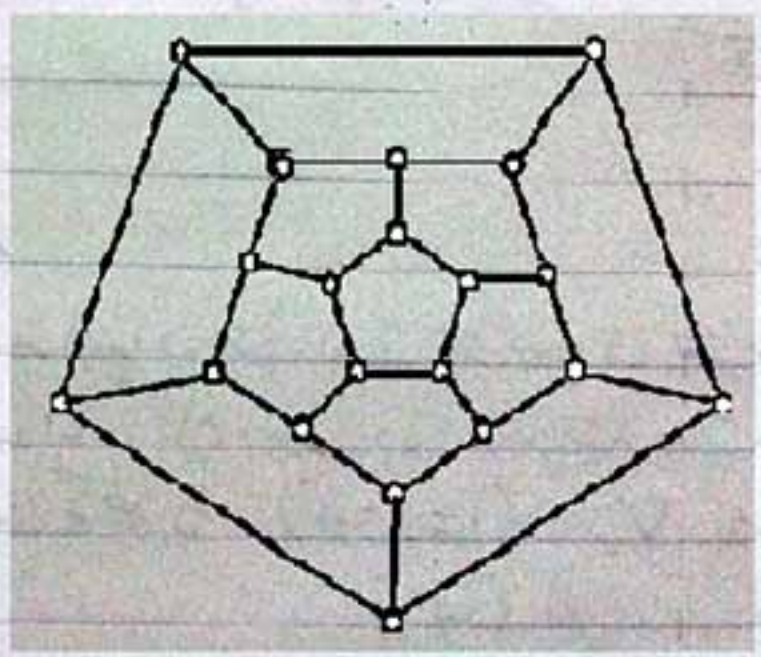
- مبرهنة: إذا كان البيان $G(V;E)$ بيان أويلر فإنّ كل طريق منشأة بواسطة خوارزمية ملوري هي دائرة أويلر في البيان G.

بيانات هاملتون:

دائرة هاملتون:

تعريف: هي دائرة تمر على جميع عقد البيان (دون تكرار العقد) وأبسط دائرة لها هاملتون هي:





دائرة هاملتون

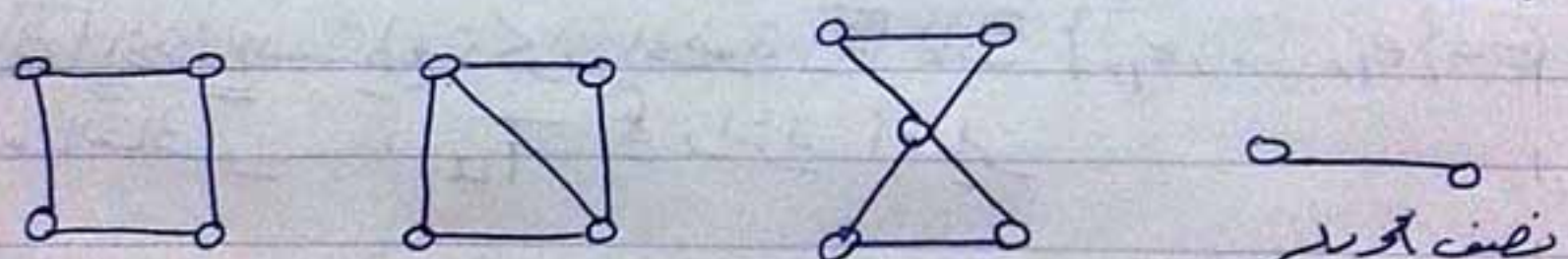
نسمّي البيان G بيان هاملتوني إذا احوى على دائرة هاملتون .

مر هاملتوني :

تعريف : هو مر يمر على جميع عقد البيان ، نسمّي البيان G بيان نصف هاملتوني إذا احوى على مر هاملتوني .

ملاحظة : إنّ مفهوم بيانات هاملتوني منفصل عن مفهوم بيانات أويلري ولا توجد علاقة فيما بينهما.

أمثلة :



نصف أويلري ونصف هاملتوني | أويلري ونصف هاملتوني | نصف أويلري وهاملتوني | أويلري وهاملتوني

ملاحظة : * لا توجد خوارزمية ذات كلفة معقولة لإيجاد دوائر هاملتوني في أي بيان

** يمكن للبيان أن يحوي أكثر من دائرة هاملتوني دون أن تكون هذه الدوائر متطابقة .

- انتهت المحاضرة 8 -

Daria Abarsha