السطوح التكاملية المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة:

لنفرض أنه لدينا السطوح التابعة لوسيط واحد ومعطاة بالمعادلة

$$\Psi(x,y,z) = C \xrightarrow{\text{ناظم}} (P,Q,R) = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)$$

$$z = \phi(x,y) \xrightarrow{\text{ناظم}} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$$

فالسطوح المتعامدة مع مجموعة السطوح السابقة هي السطوح المولدة بالمنحنيات التكاملية للجملة التفاضلية الملحقة التالية:

$$\frac{dx}{\frac{\partial\Psi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\Psi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\Psi}{\partial z}}$$

$$(P,Q,R) = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$$

مثال

أوجد السطح المتعامد مع أسرة السطوح المعينة بالمعادلة:

$$z(x+y) = C(3z+1)$$

والمار بالدائرة المعينة بالمعادلتين:

$$x^2+y^2=1 \quad , \quad z=1$$

الحل:

$$C = \Psi(x,y,z) = \frac{z(x+y)}{3z+1}$$

فالمحادلة الملحقة:

$$\frac{\frac{dx}{3}}{3z+1} = \frac{\frac{dy}{3}}{3z+1} = \frac{\frac{dz}{x+y}}{(3z+1)^2}$$

$$\frac{dx}{3(3z+1)} = \frac{dy}{3(3z+1)} = \frac{dz}{x+y}$$

(1) (2) (3)

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{dx}{3(3z+1)} = \frac{dy}{3(3z+1)} \Rightarrow dx = dy \Rightarrow x - y = C_1$$

نضرب بسط النسبة الأولى ومقامها بـ x والثانية بـ y والثالثة بـ $-z(3z+1)$ ونجمع النتائج فنحصل على النسبة

$$(1)\times x + (2)\times y - (3)\, z(3z+1) \Rightarrow \frac{x\,dx + y\,dy - z(3z+1)\,dz}{0} \Rightarrow$$

$$x\,dx + y\,dy - z(3z+1)\,dz = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^3 - \frac{z^2}{2} = C_2'$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = C_2 = \phi(x, y, z)$$

نعوض $x^2 + y^2 = 1$ ، $z = 1$

$$1 - 2 - 1 = C_2 \Rightarrow C_2 = -2$$

ومنه السطح المطلوب هو:

$$x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = -2$$

المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية الخطية :

وإن م. ت. ج م من الشكل: $F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$

م. ت. ج م الخطية من الشكل:

$$Ar+2Bs+Ct+Hp+Eq+Fz=G$$

حيث : $A^2+B^2+C^2\neq 0$

A,B,C,H,E,F,G دوال بـ x,y أو ثوابت

تصنيف المعادلات

تصنف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية حسب القيم المميزة للمعادلة : $\Delta = B^2 - AC$

إذا كانت $\Delta=0$ تسمى م. ت. ج م خ مكافئية

$\Delta<0$ " م. ت. ج م خ ناقصية

$\Delta>0$ " م. ت. ج م خ زائدية

نسبة لمعادلة القطوع

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Hx+Ey+F=0$$

أمثلة : صنف المعادلات التالية

① $\frac{\partial_2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial_2 z}{\partial t^2}$ موجية غير متخامدة "زائدية"

$r-\frac{1}{c^2}t=0$ $\Delta=B^2-AC=\frac{1}{c^2}>0$

② $\frac{\partial_2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial_2 z}{\partial t^2} + R\frac{\partial z}{\partial t}=0$ معادلة توجيه متخامدة

$r-\frac{1}{c^2}t+Rq=0$ $\Delta=\frac{1}{c^2}>0$ زائدية

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ معادلة الجهد (لابلاس)

ناقصية $r + t = 0$ $\Delta = -1 < 0$

(4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{h^2}\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ معادلة الانتشار الحراري في بعد واحد القضيب مكافئية

حل مسائل الشروط للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة فصل المتغيرات:

يمكن حل مسائل الشروط الجزئية باستخدام طريقة فصل المتغيرات وتتلخص في البحث عن الدالة المجهولة $Z = Z(x,y)$ على شكل جداء دالتين الأولى تتبع لـ x فقط والثانية تتبع لـ y فقط أي نبحث عن حل من الشكل:

$$Z = X(x) \cdot Y(y)$$

عندئذ تتحول جميع المشتقات الجزئية إلى مشتقات عادية

$$Z = XY \qquad r = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = X''Y$$

$$p = \frac{\partial Z}{\partial x} = X'Y \qquad t = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = XY''$$

$$q = \frac{\partial Z}{\partial y} = XY' \qquad s = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = X'Y'$$

بحساب المشتقات والتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية نحصل على معادلة تفاضلية عادية بالنسبة لـ X، Y ومشتقاتها

وبعملية فصل المتغيرات نحصل على معادلة تفاضلية عادية من الشكل:

$$F(X, X', X'') = G(Y, Y', Y'') = \begin{cases} \lambda \\ -\lambda^2 \\ \lambda^2 \end{cases}$$

* إذا كانت المعادلة من المرتبة الأولى يكون الثابت λ
* إذا كانت المعادلة من المرتبة الثانية يكون الثابت λ^2، $-\lambda^2$

مثال (2): أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية وذلك باستخدام فصل المتغيرات.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4\,\frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad z(0,y) = 8e^{-3y}$$

الحل: باستخدام فصل المتغيرات نبحث عن حل من الشكل

$$Z(x,y) = X(x)\,.\,Y(y)$$

نحسب المشتقات ونعوض

$$Z = X.Y \;:\; \frac{\partial z}{\partial x} = X'Y \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = XY'$$

$$X'Y = 4XY' \Rightarrow \frac{X'}{X} = 4\frac{Y'}{Y} \Rightarrow \frac{X'}{4X} = \frac{Y'}{Y} = \lambda$$

$$\frac{X'}{4X} = \lambda \Rightarrow \frac{X'}{X} = 4\lambda \Rightarrow \ln X = 4\lambda x + c_1' \Rightarrow e^{\ln X} = e^{4\lambda x + c_1'}$$

$$\Rightarrow X = e^{4\lambda x}.C_1$$

$$\frac{Y'}{Y} = \lambda \Rightarrow \ln Y = \lambda y + c_2' \Rightarrow Y = e^{\lambda y}.C_2$$

$$Z = X.Y = C_1 C_2\, e^{4\lambda x}.e^{\lambda y} = C_3 . e^{\lambda(4x+y)}$$

الشرط الابتدائي $Z(0,y) = 8e^{-3y}$

$$Z = C_3 . e^{\lambda(4x+y)} \Rightarrow Z(0,y) = C_3 e^{\lambda y} = 8e^{-3y}$$

$$\Rightarrow C_3 = 8 \quad , \quad \lambda = -3$$

$$Z(x,y) = 8e^{-3(4x+y)}$$

مثال (٤) أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات:

$$3\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad , \quad z(x,0)=4e^{-x}$$

الحل:

$$Z=X.Y \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=X'Y \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=XY'$$

$$3X'Y=-2XY' \Rightarrow \frac{X'}{2X}=-\frac{Y'}{3Y}=\lambda$$

$$\frac{X'}{2X}=\lambda \Rightarrow \frac{X'}{X}=2\lambda \Rightarrow \operatorname{Ln}X=2\lambda x+c_1'$$

$$\Rightarrow X=e^{2\lambda x}\,c_1$$

$$-\frac{Y'}{3Y}=\lambda \Rightarrow \frac{Y'}{Y}=-3\lambda \Rightarrow \operatorname{Ln}Y=-3\lambda y+c_2'$$

$$\Rightarrow Y=e^{-3\lambda y}\,c_2$$

$$Z=X.Y=c_1c_2\,e^{2\lambda x}e^{-3\lambda y}=c_3\,e^{\lambda(2x-3y)}$$

$$Z(x,0)=c_3\,e^{\lambda(2x)}=4e^{-x}$$

$$c_3=4 \quad , \quad 2\lambda=-1 \Rightarrow \lambda=-\tfrac{1}{2}$$

$$Z(x,y)=4e^{-\frac{1}{2}(2x-3y)}$$

$$=4e^{(-x+\frac{3}{2}y)}$$

مثال (٥) أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial y}+z \; ; \; Z(x,0)=3e^{-5x}+2e^{-3x}$$

الحل:

$$Z=X.Y$$

بعد الاشتقاق والتعويض نحصل على

$$X'Y=2XY'+XY$$

$$\frac{X'}{X}=2\frac{Y'}{Y}+1=\lambda$$

$$\frac{X'}{X}=\lambda \Rightarrow \ln X=\lambda x+C \Rightarrow X=e^{\lambda x}\cdot C_1$$

$$\frac{2Y'}{Y}+1=\lambda \Rightarrow \frac{Y'}{Y}=\frac{\lambda-1}{2} \Rightarrow \ln Y=\frac{\lambda-1}{2}y+C_0$$

$$\Rightarrow Y=e^{\frac{\lambda-1}{2}y}\,C_2$$

$$Z=X.Y=C_1C_2\,e^{\lambda x}\,e^{\frac{\lambda-1}{2}y}=C_3\,e^{\lambda(x+\frac{y}{2})-\frac{y}{2}}$$

وحسب مبدأ تركيب الحلول

$$Z=C_3e^{\lambda_1(x+\frac{y}{2})-\frac{y}{2}}+C_4e^{\lambda_2(x+\frac{y}{2})-\frac{y}{2}} \quad (*)$$

ومن الشرط الابتدائي

$$Z(x,0)=3e^{-5x}+2e^{-3x}=C_3e^{\lambda_1 x}+C_4e^{\lambda_2 x}$$

$$C_3=+3,\ C_4=2,\ \lambda_1=-5,\ \lambda_2=-3$$

نعوض في (*)

$$Z=3e^{-5(x+\frac{y}{2})-\frac{y}{2}}+2e^{-3(x+\frac{y}{2})-\frac{y}{2}}$$

$$=3e^{-5x-3y}+2e^{-3x-2y}$$

مثال (٤):

أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t}\ ; \qquad u \text{ محدودة}$$

$$0<x<3$$

$$u(0,t)=u(3,t)=0$$

$$u(x,0)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi x+2\sin 10\pi x$$

الحل:

$$u=X.T$$

نشتق ونعوض في المعادلة التفاضلية

$$X''T=\frac{1}{h^2}XT' \Rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{1}{h^2}\frac{T'}{T}=-\lambda^2$$

$$\frac{X''}{X}=-\lambda^2 \Rightarrow X''+\lambda^2 X=0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية متجانسة و

المعادلة المميزة لها هي

$$\mu^2+\lambda^2=0 \Rightarrow \mu_1=i\lambda \ , \ \mu_2=-i\lambda$$

$$X=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$$

$$\frac{1}{h^2}\frac{T'}{T}=-\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T}=-h^2\lambda^2 \Rightarrow \ln T=-h^2\lambda^2 t+c_3'$$

$$\Rightarrow T=c_3 e^{-h^2\lambda^2 t}$$

ومنه الحل من الشكل:

$$u=XT$$

$$u=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)(c_3 e^{-h^2\lambda^2 t})$$

$$u=c_4(\cos\lambda x)e^{-h^2\lambda^2 t}+c_5(\sin\lambda x)e^{-h^2\lambda^2 t}$$

لمعرفة الثوابت λ ، c_5 ، c_4 من الشروط الابتدائية

من الشرط الأول:

$$u(0,t)=0$$

$$c_4\cos(\lambda(0))e^{-\lambda^2h^2 t}=c_4(1)e^{-h^2\lambda^2 t}=0$$

$c_4=0 \Leftarrow$ لا تنعدم R الدالة الأسية في

ومنه:

$$u=c_5(\sin\lambda x)e^{-h^2\lambda^2 t}$$

من الشرط الثاني:

$$u(3,t)=0$$

$$c_5 e^{-h^2\lambda^2 t}\sin 3\lambda=0$$

$c_5\neq 0$ لكي لا ينتج الحل الصفري وكون الدالة الأسية لا تنعدم

ومنه $\sin 3\lambda=0 \Rightarrow \sin 3\lambda=\sin(n\pi)$

$$n=0,\mp 1,\mp 2,\dots$$

$$3\lambda=n\pi \Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{3}$$

نعوض في u

$$\boxed{u(x,t) = c_5 e^{-\frac{h^2 n^2 \pi^2}{9} t} \sin \frac{n\pi}{3} x}$$

وحسب مبدأ تركيب الحلول نجد أن:

$$u = c_5 e^{-\frac{h^2 n_1^2 \pi^2}{9} t} \sin \frac{n_1 \pi}{3} x + c_6 e^{-\frac{h^2 n_2^2 \pi^2}{9} t} \sin \frac{n_2 \pi}{3} x + c_7 e^{-\frac{h^2 n_3^2 \pi^2}{9} t} \sin \frac{n_3 \pi}{3} x \quad (*)$$

ومن الشرط الثالث:

$$u(x,0) = 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x + 2 \sin 10\pi x$$

$$\frac{n_1 \pi}{3} = 4\pi \Rightarrow n_1 = 12 \qquad c_5 = 5$$

$$\frac{n_2 \pi}{3} = 8\pi \Rightarrow n_2 = 24 \qquad c_6 = -3$$

$$\frac{n_3 \pi}{3} = 10\pi \Rightarrow n_3 = 30 \qquad c_7 = 2$$

نعوض في $(*)$ فيكون:

$$u = 5 e^{-\frac{h^2 12^2 \pi^2}{9} t} \sin(4\pi x) + (-3) e^{-\frac{h^2 24^2 \pi^2}{9} t} \sin(8\pi x) + 2 e^{-\frac{h^2 30^2 \pi^2}{9} t} \sin(10\pi x)$$

انتهت المحاضرة