المحاضرة الحادية عشرة.

خواص الأشجار:

ليكن لدينا البيان $T(V;E)$ إذا كانت T شجرة فإن ما يلي محقق:

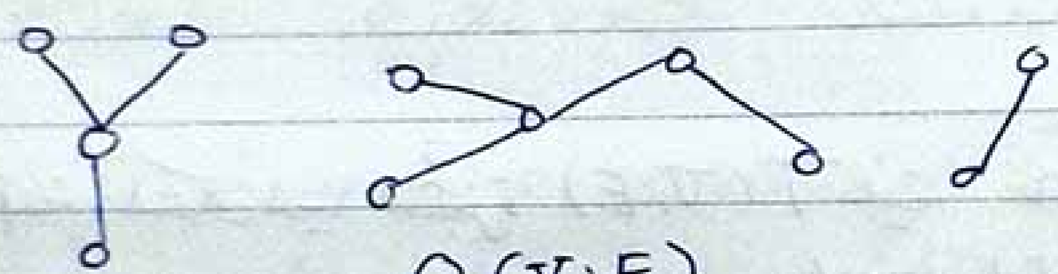
١- إذا حذفنا أي ضلع نحصل على بيان غير مترابط.

٢- إن أي ضلع في البيان T هو جسر

٣- إذا كان $|V|=n$ فإن $|E|=n-1$

تعريف: ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ نقول إن البيان G شجرة إذا كان G لا يحتوي أي دائرة.

تعريف: ليكن لدينا البيان غير المترابط $G(V;E)$ بحيث كل مركبة من مركباته عبارة عن شجرة عندئذٍ نسمي G غابة.



$G(V;E)$ "غابة"

مبرهنة: ليكن لدينا الشجرة $T(V;E)$ بحيث $|V| =$ عندئذٍ:

يوجد على الأقل عقدتين $x,y\in V$ و $x\neq y$ بحيث قدرة كل منهما تساوي الواحد: $deg(x)=deg(y)=1$

الإثبات:

بفرض T شجرة، توجد كل الممرات في هذه الشجرة ونختار منها الممر الأعظمي وليكن: $w=<x_1,e_1,x_2,\ldots\ldots,e_{n-1},x_n>$

لنثبت أن $deg(x_n)=deg(x_1)=1$ كما يلي:

لنفرض جدلاً أن $deg(x_1)>1$ (عكس $deg(x_1)=1$ ولم نضع إشارة المساواة لأنه ليس من الممكن أن يكون $deg(x_1)=0$ لأن البيان مترابط)

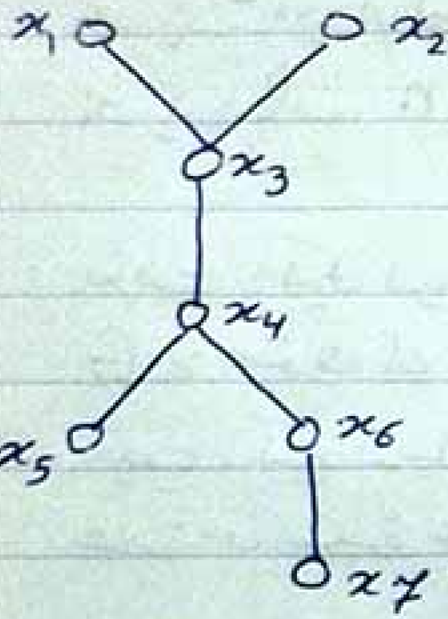
عندئذٍ يوجد $z\in V$ بحيث $z\neq x_2$ و $e=(x_1,z)\in E \not\ni w$

عندئذٍ $w'=<z,e,x_1,e_1,x_2,\ldots\ldots,e_{n-1},x_n>$ ممر أكبر من الممر w في T وهذا يناقض كون w هو الممر الأعظمي وبالتالي

الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي $deg(x_1)=1$

وبنفس الطريقة نثبت أن $deg(x_n)=1$.

مثال توضيحي:



الممرات الأعظمية:

$\langle x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \rangle$

$\langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \rangle$

نلاحظ أن:

$deg(x_1)=deg(x_2)=deg(x_7)=1$

خطأ

مبرهنة: لتكن لدينا الشجرة $T(V,E)$ بحيث $|V|>n$ عندئذٍ:

$|E|=n-1$

الإثبات:

بالاستقراء الرياضي على n:

عندما $n=2$ فإن o—o $\Rightarrow |E|=n-1=2-1=1$ محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل $n=k$ أي:

$|V|=k \rightarrow |E|=k-1$ صحيحة

لنثبت صحتها من أجل $n=k+1$ أي:

$|V|=k+1 \rightarrow |E|=k$

$T_{k+1}(V,E) : V=k+1 \rightarrow \exists\, x \in V : deg(x)=1$

$\rightarrow \exists!\, y \in V : e=(x,y)$

$\Rightarrow T_{k+1}(V-\{x\}, E-\{e\}) \rightarrow |V-\{x\}|=k$

وحسب الفرض

وبالتالي: $|E-\{e\}|=k-1$

$|V| = k+1 \rightarrow |E| = |E - \{e\} + \{e\}| = k-1+1 = k$

وهو المطلوب

مبرهنة: ليكن $T(V;E)$ مترابط، $|V| = n$ عندئذٍ فإن:

T شجرة $\Leftrightarrow$ $|E| = n-1$

($\leftarrow$) محقق

($\Leftarrow$) محقق حسب المبرهنة السابقة.

($\rightarrow$) لنفرض أن $|E| = n-1$ ولنثبت أن T شجرة.

(يجب أن نثبت أن T لا يحتوي على دائرة) لذلك نفرض جدلاً أن

T يحتوي على دائرة ولتكن $C = \langle x_1, e_1, x_2, \dots, e_{n-1}, x_n = x_1 \rangle$

وبالتالي (بما أن C دائرة) فإن e_1 ليس جسراً في T ، $e_1 \in E$

وبالتالي إذا حذفنا هذا الضلع فإن البيان يبقى مترابطاً أي:

$T - \{e_1\}$ مترابط وبالتالي: $T - \{e_1\} = (V; E - \{e_1\})$

$|V| = n \,,\ |E - \{e_1\}| = n-1-1 = n-2$

وهذا يناقض مبرهنة إذاً T لا يحتوي دائرة $\Leftarrow$ T شجرة.

سابقة (إذا كان لدينا بيان مترابط عدد عقده $|V| = n$ $\Leftarrow$ $|E| \geq n-1$)

مبرهنة: لتكن $T(V;E)$ شجرة بحيث $|V| = n$ ولا يحتوي على دوائر

عندئذٍ:

T شجرة $\Leftrightarrow$ $|E| = n-1$

الإثبات:

($\Leftarrow$) إذا كانت T شجرة فإن $|E| = n-1$ حسب مبرهنة سابقة.

($\rightarrow$) لنفرض أن T بيان لا يحتوي على دوائر بحيث $|V| = n$ و $|E| = n-1$

نريد أن نثبت أن T شجرة أي أن T بيان مترابط

لتكن $C_i(V_i;E_i)$ حيث $i = 1, \dots\dots, m$ هي مركبات البيان T

بما أنَّ T لا يحتوي على دوائر فإنَّ كل مركبة C_i لا تحتوي على دوائر وبالتالي فإنَّ كل مركبة C_i عبارة عن شجرة وبالتالي من أجل $i = 1, \ldots, m$ نجد:

$$\underbrace{|E_1| + |E_2| + \cdots + |E_m|}$$

$\Rightarrow \quad |E| = |V| - m$

$\Rightarrow \quad n - 1 = n - m$

$\Rightarrow \quad m = 1$

⇐ T مترابط فهو شجرة.

انتهت المحاضرة الحادية عشرة

Dania Albarsha