المحاضرة الثالثة عشر ٢٠١٤/٤/١٤

$$\overrightarrow{S}(t) = \int_0^t |\overrightarrow{f'(t)}|\,dt = \int_0^t r\,dt = rt$$

المحيط $= 2\pi r$

$$S = rt \Rightarrow t = \frac{S}{r}$$ بتغيير المتغير:

$$\overrightarrow{f}(S) = \left(r\cos\frac{S}{r}, r\sin\frac{S}{r}\right)$$

$$\overrightarrow{T}(S) = \overrightarrow{f'}(S) = \left(-\sin\frac{S}{r}, \cos\frac{S}{r}\right).$$

المحاضرة الثالثة عشرة ٢٠١٤/٤/١٤

تكملة "المسائر الرئيسية":

① $$\frac{d\overrightarrow{T}}{dS} = \frac{d\overrightarrow{T}}{dt}\cdot\frac{dt}{dS} = \overrightarrow{N}\,|\overrightarrow{T'}(t)|\cdot\frac{1}{\frac{dS}{dt}}$$

$$= \overrightarrow{N}\,|\overrightarrow{T'}(t)|\frac{1}{S'(t)} = \overrightarrow{N}\,\frac{|\overrightarrow{T'}(t)|}{S'}$$

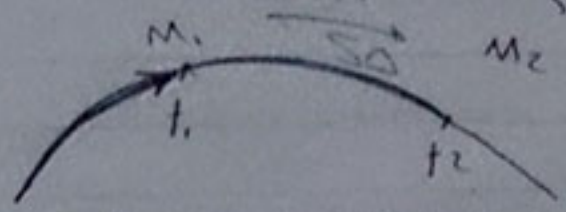
$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\overrightarrow{T'}(t)|}{S'}$$ ندعو ρ نصف قطر التقوس أو انعكاسه هو التقوس.

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dS} = \frac{\overrightarrow{N}}{\rho}$$ وهذا يسمى الانحناء الأول

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\overrightarrow{T'}(t)|}{S'}$$

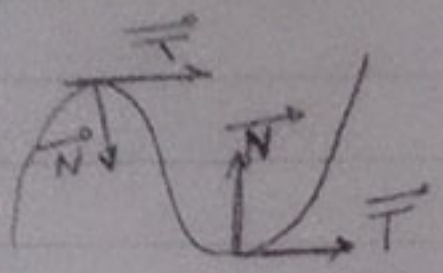
$$S' = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

ان $\rho > 0$:
- البسط موجب
- المقام نعتبره موجب دائماً



ان $\begin{cases} \Delta S > 0 \text{ و } \Delta t > 0 \\ \Delta S < 0 \text{ و } \Delta t < 0 \end{cases}$ $\Leftarrow \frac{\Delta S}{\Delta t}$ مقدار موجب.

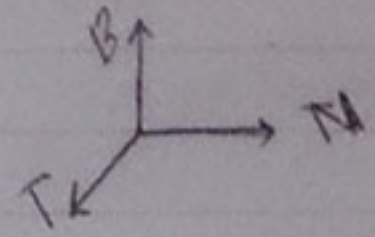
وبما أن $\rho > 0 \Leftarrow \frac{1}{\rho} > 0$ وكذلك $\frac{\Delta t}{\Delta S}$ موجب



② أن $\vec{N}$ يساعد $\vec{T}$ ويتجه دوماً نحو تقعر المنحنى:

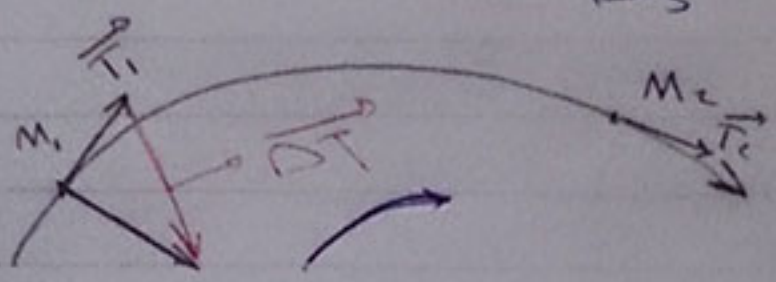
لدينا $\vec{N} = \dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{|\vec{T}(t)|}$

ولكون $|\vec{T}|$ موجبة اذاً جهة $\vec{N}$ هي جهة $\frac{d\vec{T}}{dt}$ وبالتالي جهة $\frac{d\vec{T}}{dt}$



$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ولكن $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ مقدار موجب. اذاً يكفي لدراسة جهة $\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{dt}$ دراسة جهة $\frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s}$



- نلاحظ من الرسمة أن $\frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s}$ يتجه نحو تقعر المنحنى

إذاً $\vec{N}$ يتجه نحو تقعر المنحنى.

③ ℓ مستقيم $\iff \frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{0}$ مشتق بالنسبة لـ s

الحل: $\Leftarrow$

ℓ مستقيم $\Leftarrow$ ℓ موجود في مستوٍ ثابت

يساعد B دوماً $\Leftarrow$ B ثابت $\Leftarrow \frac{d\vec{B}}{ds} = 0$

$\vec{T} \perp \vec{B}$ اذ $\vec{B}$ شعاع ثابت $\Leftarrow \frac{d\vec{B}}{ds} = 0 \Leftarrow \vec{T} \cdot \vec{B} = 0$

$f(t) = (\ ,\ ,\ ) = \vec{OM}$ $\Leftarrow \frac{d\vec{f}}{ds} \cdot \vec{B} = 0$ $\Leftarrow$

حيث $M \in \ell$ و O مبدأ الإحداثيات

M نقطة دائمة في ℓ: $\boxed{\frac{d\vec{OM}}{ds} \vec{B} = 0}$ ---- (*)

البرهان:

مشتق $\vec{B}$ بالنسبة إلى S

$$\frac{d}{ds}(\vec{OM}\cdot\vec{B}) = \vec{OM}\cdot\frac{d\vec{B}}{ds} + \frac{d\vec{OM}}{ds}\cdot\vec{B}$$

من جهة أخرى:

$$= 0 + \frac{d\vec{OM}}{ds}\vec{B} = 0 + 0 = 0$$

لأنه $\frac{d\vec{OM}}{ds} = \vec{0}$ ∗ ش

وبما أن $\frac{d}{ds}(\vec{OM}\cdot\vec{B}) = 0 \Leftarrow \vec{OM}\cdot\vec{B} = 0$

ومنه المنحنى يقع في مستوي يعامد $\vec{B}$ لأن $\vec{B}$ شعاع ثابت

وهذا ما يفسر أن ℓ مستوٍ

- لحساب $\vec{B}$ بدلالة S ثم نشتق $\vec{B}$ بالنسبة إلى S ⇐ إذا كان $\vec{0}$ = فالمنحنى مستوي

مثال: حالة الدائرة

(4): دساتور فرينيه الثالث:

لدينا $\frac{d\vec{B}}{ds} \neq 0$ (المنحنى غير مستوٍ)

لدينا $\vec{B} = \vec{T}\wedge\vec{N}$ شعاع واحدة لأن: $\|\vec{T}\| = \|\vec{N}\| = 1$ و $\vec{T} \perp \vec{N}$

عندها ① $\frac{d\vec{B}}{ds} \perp \vec{B}$

من جهة ثانية $\vec{B}\cdot\vec{T} = 0$ نشتق بالنسبة إلى S

$$\frac{d\vec{B}}{ds}\vec{T} + \vec{B}\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds}\vec{T} + \vec{B}\cdot\frac{\vec{N}}{R} = 0$$

حسب دساتور فرينيه الأول.

$$\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{T} = 0$$

ولكن $\vec{N} \perp \vec{B}$ ⇐ ومنه

② $\frac{d\vec{B}}{ds} \perp \vec{T}$

من ① و ② نجد $\frac{d\vec{B}}{ds} \parallel \vec{N}$

وهو قرينة ثالث

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\vec{N}$$

حيث τ تسمى كمية الالتفاف وتدعى بـ باليا لتفاف.

مثال: $\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2\pi} t)$

المطلوب حساب κ, τ.

الحل: لدينا: $\boxed{s = \alpha t}$

$$\kappa = \frac{s'(t)}{\|f'(t)\|}$$

$$\kappa = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha^2$$

$$\vec{N} = (-\cos t, -\sin t, 0), \vec{B} = \left(\frac{\sin t}{2\alpha}, \frac{-\cos t}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$$

نعوض: $t = \frac{s}{\alpha}$

$$\vec{N} = \left(-\cos\frac{s}{\alpha}, -\sin\frac{s}{\alpha}, 0\right), \vec{B} = \left(\frac{\sin\frac{s}{\alpha}}{2\alpha}, \frac{-\cos\frac{s}{\alpha}}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \left(\frac{\cos\frac{s}{\alpha}}{2\alpha\alpha^2}, +\frac{\sin\frac{s}{\alpha}}{2\alpha\alpha^2}, 0\right)$$

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{-1}{2\alpha\alpha^2} \Rightarrow \boxed{\tau = 2\pi\alpha^2}$$

- هل المنحني موجود في مستوٍ واحد؟

المنحني لا يقع في مستوٍ واحد لأن $\frac{d\vec{B}}{ds} \neq 0$